Su un principio di anti–massimo quasi uniforme

Dimitri Mugnai

Università di Perugia

Metodi topologici e variazionali in analisi non lineare

in occasione del settantesimo compleanno del professor Antonio Marino

Brescia 29–30 aprile 2010

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f(x) & \text{in } \Omega, \\ Bu = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

$\Omega \subset R^N$, $N \geq 1$, dominio limitato, B denota condizioni di Dirichlet o di Neumann.

Principio del massimo:

$$\textbf{(MP)}: \lambda < \lambda_1 \Rightarrow \textit{per ogni } f \geq 0 \text{ risulta } u \leq 0 \text{ in } \Omega.$$

Principio del massimo forte:

$$\textbf{(SMP)}: \text{se } f \neq 0, \text{ allora } u < 0 \text{ in } \Omega.$$

Se $\lambda > \lambda_1$?

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f(x) & \text{in } \Omega, \\ Bu = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

$\Omega \subset R^N$, $N \geq 1$, dominio limitato, B denota condizioni di Dirichlet o di Neumann.
Principio del massimo:

(MP): $\lambda < \lambda_1 \Rightarrow$ *per ogni* $f \geq 0$ risulta $u \leq 0$ in Ω.

Principio del massimo forte:

(SMP): se $f \neq 0$, allora $u < 0$ in Ω.

Se $\lambda > \lambda_1$?

Clément e Peletier (JDE, 1979): primo *principio di antimassimo* **(AMP)**: per ogni $f \geq 0$ in $L^p(\Omega)$, $p > N$, esiste $\delta = \delta(f) > 0$ tale che se u risolve (1) con $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ e condizioni di Dirichlet o Neumann omognee, allora $u \geq 0$ in Ω.

Con Neumann è possibile prendere δ indipendente da f solo se $N = 1$: *principio di antimassimo uniforme*, o **(UAMP)**.

Cabada - Lois (NA TMA 1997): **(AMP)** per ODEs di ordine superiore con condizioni periodiche;

Godoy - Gossez - Paczka (CVPDEs 2004): **(AMP)** con Neumann o Robin. $f \in L^p$, $p > 1$ e **(UAMP)** solo se $N = 1$;

Sweers (JDE 1997): $p > N$ è essenziale per **(AMP)** in (1) con condizioni di Dirichlet: per ogni $f \in L^p$, $p \leq N$, esiste u che non è minore o uguale di 0 in Ω;

Clément - Sweers (PAMS 2000 e JDE 2000): **(AMP)** e **(UAMP)** per operatori poliarmonici in dimensioni basse: lo spazio di Sobolev delle soluzioni deboli si immerge in $C^0(\bar{\Omega})$.

Grunau - Sweers (ASNS 2001): condizione ottimale per **(AMP)** per operatori poliarmonici in dimensioni basse.

Clément e Peletier (JDE, 1979): primo *principio di antimassimo* **(AMP)**: per ogni $f \geq 0$ in $L^p(\Omega)$, $p > N$, esiste $\delta = \delta(f) > 0$ tale che se u risolve (1) con $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ e condizioni di Dirichlet o Neumann omognee, allora $u \geq 0$ in Ω.

Con Neumann è possibile prendere δ indipendente da f solo se $N = 1$: *principio di antimassimo uniforme*, o **(UAMP)**.

Cabada - Lois (NA TMA 1997): **(AMP)** per ODEs di ordine superiore con condizioni periodiche;

Godoy - Gossez - Paczka (CVPDEs 2004): **(AMP)** con Neumann o Robin. $f \in L^p$, $p > 1$ e **(UAMP)** solo se $N = 1$;

Sweers (JDE 1997): $p > N$ è essenziale per **(AMP)** in (1) con condizioni di Dirichlet: per ogni $f \in L^p$, $p \leq N$, esiste u che non è minore o uguale di 0 in Ω;

Clément - Sweers (PAMS 2000 e JDE 2000): **(AMP)** e **(UAMP)** per operatori poliarmonici in dimensioni basse: lo spazio di Sobolev delle soluzioni deboli si immerge in $C^0(\bar{\Omega})$.

Grunau - Sweers (ASNS 2001): condizione ottimale per **(AMP)** per operatori poliarmonici in dimensioni basse.

Clément e Peletier (JDE, 1979): primo *principio di antimassimo* **(AMP)**: per ogni $f \geq 0$ in $L^p(\Omega)$, $p > N$, esiste $\delta = \delta(f) > 0$ tale che se u risolve (1) con $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ e condizioni di Dirichlet o Neumann omognee, allora $u \geq 0$ in Ω.

Con Neumann è possibile prendere δ indipendente da f solo se $N = 1$: *principio di antimassimo uniforme*, o **(UAMP)**.

Cabada - Lois (NA TMA 1997): **(AMP)** per ODEs di ordine superiore con condizioni periodiche;

Godoy - Gossez - Paczka (CVPDEs 2004): **(AMP)** con Neumann o Robin. $f \in L^p$, $p > 1$ e **(UAMP)** solo se $N = 1$;

Sweers (JDE 1997): $p > N$ è essenziale per **(AMP)** in (1) con condizioni di Dirichlet: per ogni $f \in L^p$, $p \leq N$, esiste u che non è minore o uguale di 0 in Ω;

Clément - Sweers (PAMS 2000 e JDE 2000): **(AMP)** e **(UAMP)** per operatori poliarmonici in dimensioni basse: lo spazio di Sobolev delle soluzioni deboli si immerge in $C^0(\bar{\Omega})$.

Grunau - Sweers (ASNS 2001): condizione ottimale per **(AMP)** per operatori poliarmonici in dimensioni basse.

Campos - Mawhin - Ortega (CCM 2008) mostrano un principio del massimo e antimassimo “globale” per operatori differenziali lineari L che coprono (1) con condizioni di Neumann con $N = 1$, ODEs con condizioni periodiche e l’equazione telegrafica in una dimensione spaziale con doppie condizioni periodiche. Assunto fondamentale: stima $L^\infty - L^1$ per soluzione–dato della forma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M\|f\|_{L^1(\Omega)},$$

del tutto naturale per i loro prototipi.

Senza entrare nelle ipotesi astratte, si pensi come modello a $Lu = u''$ con condizioni di Neumann, così che $\lambda_1 = 0$.

Definizione (CMO)

Dato $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, diciamo che $L + \lambda I$ soddisfa un *principio del massimo* – **(MP)** – se per ogni $f \in L^1(\Omega)$

$$Lu + \lambda u = f, \quad u \in \mathrm{Dom}(L) \subset C^0$$

ha un'unica soluzione con $\lambda u \geq 0$ se $f \geq 0$. **(MP)** è *forte* – **(SMP)** – se $\lambda u > 0$ in Ω quando $f \geq 0$ ma $f \not\equiv 0$.

È un principio del massimo "classico" se $\lambda < \lambda_1 = 0$ e un **(UAMP)** se $\lambda > 0$. Inoltre per $\lambda > 0$ è **(UAMP)** *tout court.*

Teorema (CMO)

Esistono λ_- e λ_+ con $-\infty \leq \lambda_- < 0 < \lambda_+ \leq +\infty$ tali che $L + \lambda I$ ha un **(MP)** se e solo se $\lambda \in [\lambda_-, 0) \cup (0, \lambda_+]$. *Vale* **(SMP)** *se $\lambda \in (\lambda_-, 0) \cup (0, \lambda_+)$.*

Definizione (CMO)

Dato $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, diciamo che $L + \lambda I$ soddisfa un *principio del massimo* – **(MP)** – se per ogni $f \in L^1(\Omega)$

$$Lu + \lambda u = f, \quad u \in \mathrm{Dom}(L) \subset C^0$$

ha un'unica soluzione con $\lambda u \geq 0$ se $f \geq 0$. **(MP)** è *forte* – **(SMP)** – se $\lambda u > 0$ in Ω quando $f \geq 0$ ma $f \neq 0$.

È un principio del massimo "classico" se $\lambda < \lambda_1 = 0$ e un **(UAMP)** se $\lambda > 0$. Inoltre per $\lambda > 0$ è **(UAMP)** *tout court.*

Teorema (CMO)

Esistono λ_- e λ_+ con $-\infty \leq \lambda_- < 0 < \lambda_+ \leq +\infty$ tali che $L + \lambda I$ ha un **(MP)** *se e solo se $\lambda \in [\lambda_-, 0) \cup (0, \lambda_+]$. Vale* **(SMP)** *se $\lambda \in (\lambda_-, 0) \cup (0, \lambda_+)$.*

Ma una stima più naturale per (1) sarebbe del tipo $L^2 - L^2$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq M\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

visto che $L^1(\Omega)$ non è la classe naturale per f:

$$L^1(\Omega) \not\subset (H^1(\Omega))' \text{ se } N > 1!$$

Difatti

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, *non può* essere trattato da [CMO] se $f \in L^2(\Omega)$, che è l'ipotesi più ragionevole, dato che $L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'$.

Ma una stima più naturale per (1) sarebbe del tipo $L^2 - L^2$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq M\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

visto che $L^1(\Omega)$ non è la classe naturale per f:

$$L^1(\Omega) \not\subset (H^1(\Omega))' \text{ se } N > 1!$$

Difatti

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, *non può* essere trattato da [CMO] se $f \in L^2(\Omega)$, che è l'ipotesi più ragionevole, dato che $L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'$.

Regolarità ellittica: Ω regolare e $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow$ la soluzione u di (2) appartiene a $H^2(\Omega)$ ed esiste $C = C(\Omega) > 0$ tale che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dal Teorema di Morrey, se $N = 1, 2, 3$, risulta $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, così che

$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Scopo: combinare lo spirito dei risultati precedenti per mostrare che, sebbene **(UAMP)** non possa valere in dimensioni più alte, un "quasi–**(UAMP)**" vale.

Osservazione: non è ipotesi "naturale" $L^2 - L^2$, ma per stime puntuali forse questa stima $L^\infty - L^2$ è effettivamente più naturale. Forse altri metodi saranno necesari a partire da stima $L^2 - L^2$ per avere risultati q.o.

Regolarità ellittica: Ω regolare e $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow$ la soluzione u di (2) appartiene a $H^2(\Omega)$ ed esiste $C = C(\Omega) > 0$ tale che

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dal Teorema di Morrey, se $N = 1, 2, 3$, risulta
$H^2(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, così che

$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Scopo: combinare lo spirito dei risultati precedenti per mostrare che, sebbene **(UAMP)** non possa valere in dimensioni più alte, un "quasi–**(UAMP)**" vale.

Osservazione: non è ipotesi "naturale" $L^2 - L^2$, ma per stime puntuali forse questa stima $L^\infty - L^2$ è effettivamente più naturale. Forse altri metodi saranno necesari a partire da stima $L^2 - L^2$ per avere risultati q.o.

$$\overline{f} := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f d\mu, \qquad \tilde{f} := f - \overline{f},$$

$$\mathcal{L} := \{f \in L^2(\Omega) \, : \overline{f} = 0\}, \qquad \tilde{\mathcal{C}} := C^0(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{L},$$

Per $k > 0$ sia $\mathcal{F}_k := \{f \in L^2(\Omega) \, : \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq k\|f\|_{L^1(\Omega)}\}$.
$L : \mathrm{Dom}(L) \subset C^0(\bar{\Omega}) \to L^2(\Omega)$ tale che

$$\mathrm{Ker}(L) = \{\text{funzioni costanti}\}, \quad \mathrm{Im}(L) = \mathcal{L} \quad (\Rightarrow \lambda_1 = 0). \tag{3}$$

$$\begin{cases} \text{il problema } Lu = \tilde{f} \text{ ha un'unica soluzione } \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{C}} \\ \text{e } \exists\, M = M(L) > 0 \text{ tale che } \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \tag{4}$$

Definizione

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, diciamo che $L + \lambda I$ soddisfa un *principio del massimo k–uniforme*, $\boldsymbol{k}$**–(UMP)**, se per ogni $f \in \mathcal{F}_k$ il problema $Lu + \lambda u = f$, $u \in \mathrm{Dom}(L)$, ha un'unica soluzione con $\lambda u \geq 0$ se $f \geq 0$. $\boldsymbol{k}$**–(UMP)** *forte* se $\lambda u > 0$ in Ω quando $f \neq 0$.

$\lambda < 0$: **(MP)**. $\lambda > 0$: **(AMP)**, che è "quasi" uniforme.

Teorema (Fragnelli - M, 2010)

Fissato $k > 0$, *esiste* $\Lambda = \Lambda(k) > 0$ *tale che* $L + \lambda I$ *ha un* $\boldsymbol{k}$–**(UMP)** *se* $\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]$. *Inoltre vale un* $\boldsymbol{k}$–**(UMP)** *forte se* $\lambda \in (-\Lambda, \Lambda) \setminus \{0\}$.

Cioè esiste un intorno $\mathcal{U}$ di 0 tale che

$$\mathcal{U} \setminus \{0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{R} : L + \lambda I \text{ soddisfa un } \boldsymbol{k}\text{–}\mathbf{(UMP)}\}.$$

In termini di **(AMP)** "quasi"–uniforme, possiamo affermare che esiste $\delta = \delta(k) > 0$ tale che per ogni $\lambda \in (0, \delta)$ e per ogni $f \in \mathcal{F}_k$, $f \geq 0$, la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

è non positiva, almeno se $N = 1, 2, 3$, in contrasto con la validità di **(UAMP)** solo per $N = 1$.
In conclusione, l'uniformità desiderata non può valere in L^2, ma in $\mathcal{F}_k$ sì, perchè $L^1 \neq L^2$!

Teorema (Fragnelli - M, 2010)

Fissato $k > 0$, esiste $\Lambda = \Lambda(k) > 0$ tale che $L + \lambda I$ ha un $\boldsymbol{k}$**–(UMP)** *se $\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]$. Inoltre vale un* $\boldsymbol{k}$**–(UMP)** *forte se $\lambda \in (-\Lambda, \Lambda) \setminus \{0\}$.*

Cioè esiste un intorno $\mathcal{U}$ di 0 tale che

$$\mathcal{U} \setminus \{0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{R} : L + \lambda I \text{ soddisfa un } \boldsymbol{k}\text{–}\mathbf{(UMP)}\}.$$

In termini di **(AMP)** "quasi"–uniforme, possiamo affermare che esiste $\delta = \delta(k) > 0$ tale che per ogni $\lambda \in (0, \delta)$ e per ogni $f \in \mathcal{F}_k$, $f \geq 0$, la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

è non positiva, almeno se $N = 1, 2, 3$, in contrasto con la validità di **(UAMP)** solo per $N = 1$.
In conclusione, l'uniformità desiderata non può valere in L^2, ma in $\mathcal{F}_k$ sì, perchè $L^1 \neq L^2$!

Osservazioni

1. Se la soluzione del problema appartiene al "giusto" spazio di Sobolev, *independentemente* dallo spazio di Lebesgue che contiene f, **(MP)** classico e q.o. posso essere provati anche per soluzioni di disequazioni distribuzionali *nonlineari*:
Pucci - Serrin ("The maximum principle", 2007)

per varietà Riemaniane:
Antonini - M. - Pucci (JMPA 2007),
M. - Pucci (ANS 2009) operatori non omogenei;

per operatori in spazi di Sobolev e Lebesgue anisotropici:
Fortini - M. - Pucci (NA TMA 2009).

2. [CMO] hanno una completa caratterizzazione dei λ per cui vale **(UAMP)** ("se e solo se"); in generale noi solo in alcuni casi particolari, ad esempio se Ω ha misura piccola.

Osservazioni

1. Se la soluzione del problema appartiene al "giusto" spazio di Sobolev, *independentemente* dallo spazio di Lebesgue che contiene f, **(MP)** classico e q.o. posso essere provati anche per soluzioni di disequazioni distribuzionali *nonlineari*:
Pucci - Serrin ("The maximum principle", 2007)

per varietà Riemaniane:
Antonini - M. - Pucci (JMPA 2007),
M. - Pucci (ANS 2009) operatori non omogenei;

per operatori in spazi di Sobolev e Lebesgue anisotropici:
Fortini - M. - Pucci (NA TMA 2009).

2. [CMO] hanno una completa caratterizzazione dei λ per cui vale **(UAMP)** ("se e solo se"); in generale noi solo in alcuni casi particolari, ad esempio se Ω ha misura piccola.

Prima applicazione: operatore di Laplace

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \{1,2,3\}$ dominio limitato e regolare, $f \in L^2(\Omega)$. $\mathrm{Ker}(\Delta) = \{\text{funzioni costanti}\}$ e $\lambda_1 = 0$. Inoltre esiste un'unica soluzione $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$ con $\int_\Omega u = 0$ ($u \in \tilde{\mathcal{C}}$) di

$$\begin{cases} \Delta u = \tilde{f} & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Per regolarità ellittica $\exists\, M > 0$ tale che $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq M \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)}$.

Proposizione (Fragnelli - M, 2010)

*$N \in \{1,2,3\}$; allora per ogni $k > 0$ esiste $\Lambda = \Lambda(k) > 0$ tale che, se $\lambda \in [-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda]$, allora $\Delta + \lambda I$ con condizioni di Neumann omogenee soddisfa $\boldsymbol{k}-$**(UMP)**. Inoltre $\boldsymbol{k}-$**(UMP)** è forte se $\lambda \in (-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda)$.*

Prima applicazione: operatore di Laplace

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \{1,2,3\}$ dominio limitato e regolare, $f \in L^2(\Omega)$. $\mathrm{Ker}(\Delta) = \{\text{funzioni costanti}\}$ e $\lambda_1 = 0$. Inoltre esiste un'unica soluzione $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$ con $\int_\Omega u = 0$ $(u \in \tilde{C})$ di

$$\begin{cases} \Delta u = \tilde{f} & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Per regolarità ellittica $\exists\, M > 0$ tale che $\|u\|_{H^2(\Omega)} \le M \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)}$.

Proposizione (Fragnelli - M, 2010)

$N \in \{1,2,3\}$; allora per ogni $k > 0$ esiste $\Lambda = \Lambda(k) > 0$ tale che, se $\lambda \in [-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda]$, allora $\Delta + \lambda I$ con condizioni di Neumann omogenee soddisfa ***k*–(UMP)**. *Inoltre* ***k*–(UMP)** *è forte se $\lambda \in (-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda)$.*

Seconda applicazione: problemi poliarmonici

$$\begin{cases} \Delta^m u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \ldots = \frac{\partial \Delta^{m-1} u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

$m \in \mathbb{N}$, $N \in \{1, \ldots, 4m-1\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio limitato e regolare. $\mathrm{Ker}(\Delta^m) = \{\text{funzioni costanti}\}$ e $\mathrm{Im}(L) = \mathcal{L}$. Da regolarità ellittica la soluzione debole $u \in H^m(\Omega)$ appartiene a $H^{2m}(\Omega)$ e $\|\tilde{u}\|_{H^{2m}} \le M \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)}$, $M > 0$. Dato che $N \le 4m-1$, risulta $H^{2m}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$, quindi si può applicare il Teorema:

Proposizione (Fragnelli - M, 2010)

*Per ogni $k > 0$ esiste $\Lambda = \Lambda(k) > 0$ tale che $\Delta^m + \lambda I$ con condizioni di Neumann omogenee soddisfa $\boldsymbol{k}-$**(UMP)** se $\lambda \in [-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda]$. Inoltre $\boldsymbol{k}-$**(UMP)** è forte se $\lambda \in (-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda)$.*

[CMO] avevano risultato analogo in L^1 per $N \le 2m-1$.

Terza applicazione: problemi parabolici periodici

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} + \lambda u = f & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u_x = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(0) = u(T). \end{cases} \tag{7}$$

Ω =intervallo di $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $T > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ and $f \in L^2(Q_T)$, con $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Poniamo $Lu := u_t - \alpha u_{xx}$ con

$$D(L) = \left\{ u \in H^1(0,T; H^2(\Omega)) \,:\, u_x = 0 \text{ su } \partial\Omega \text{ per q.o. } t \in (0,T) \right\}.$$

Una soluzione debole di (7) è una funzione $u \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ tale che $u(0) = u(T)$ e

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega uv\,dx + \alpha\int_\Omega u_x v_x\,dx + \lambda\int_\Omega uv\,dx = \int_\Omega fv\,dx \tag{8}$$

per q.o. $t \in (0,T)$ e per ogni $v \in H^1(\Omega)$.

Da regolarità parabolica $u \in C([0,T]; H^1(\Omega))$. Questo implica che $\mathrm{Ker}(L) = \{\text{costanti}\}$: se u risolve

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u_x = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(0) = u(T), \end{cases}$$

si prende $v = u$, si integra su $(0,T)$ e da periodicità $u \equiv c \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Im}(L) = \mathcal{L} := \left\{ f \in L^2(Q_T) \; : \; \int_{Q_T} f \, dx \, dt = 0 \right\}.$$

Infatti, se $f \in \mathrm{Im}(L)$, integrando su $(0,T)$ con $v = 1$, si ottiene

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_\Omega u \, dx \, dt = \int_{Q_T} f \, dx \, dt = 0 \quad \text{(per periodicità)}.$$

Viceversa, se $f \in \mathcal{L} \subset (L^2(0,T); H^1(\Omega))'$, da Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/B. Nonlinear monotone operators*, Theorem 32.D, si ha che $f \in \mathrm{Im}(L)$.

Ogni soluzione di (7) per $\lambda = 0$ è definita a meno di costanti, quindi esiste un'unica soluzione

$$\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{C}} := \left\{ v \in C^0(\overline{Q_T}) \, : \, \int_{Q_T} v \, dx \, dt = 0 \right\}.$$

Per regolarità parabolica esiste $C = C(\alpha, T, \Omega)$ tale che

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C \big\{ \|\tilde{u}(0)\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(Q_T)} \big\}.$$

Assumiamo ora $C = C(\alpha, T, \Omega) < 1$.
Allora

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq \frac{C}{1 - C} \|\tilde{f}\|_{L^2(Q_T)}.$$

Per Poincaré–Wirtinger

$$\|\tilde{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{|\Omega|} \|\tilde{u}(t)\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \, t,$$

da cui

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(Q_T)} \leq \frac{C\sqrt{|\Omega|}}{1 - C} \|\tilde{f}\|_{L^2(Q_T)};$$

quindi (4) è soddisfatta con $M = \frac{C\sqrt{|\Omega|}}{1-C}$.

Teorema (Fragnelli - M, 2010)

Poniamo $Lu := u_t - \alpha u_{xx}$. *Nelle ipotesi sopra, fisato* $k > 0$, *esiste* $\Lambda = \Lambda(k) > 0$ *tale che* $L + \lambda I$ *ha un* $\boldsymbol{k}$–**(UMP)** *se* $\lambda \in [-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda]$. $\boldsymbol{k}$–**(UMP)** *è forte se* $\lambda \in (-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda)$.

(AMP) per il caso parabolico: poco...

Díaz - Fleckinger–Pellé (DCDS 2004): **(AMP)** *definitivo* per problema di Cauchy con condizione di Dirichlet omogenee.

Godoy - Lami Dozo - Paczka (RSMUPT 2002): **(AMP)** per caso parabolico con condizioni di Dirichlet o di Neumann omognee. Se $N = 1$, allora $p > 3$. No **(UAMP)**.

Perché problemi parabolici periodici? Applicazioni biologiche:
Hess (monografia 1991),
Allegretto - Nistri (IMA JMCI 1999),
Quittner - Souplet (monografia 2007),
Fragnelli - M. (DCDS 2008),
Fragnelli (JMAA 2010).

Teorema (Fragnelli - M, 2010)

Poniamo $Lu := u_t - \alpha u_{xx}$*. Nelle ipotesi sopra, fisato* $k > 0$*, esiste* $\Lambda = \Lambda(k) > 0$ *tale che* $L + \lambda I$ *ha un* $\boldsymbol{k}$–**(UMP)** *se* $\lambda \in [-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda]$*.* $\boldsymbol{k}$–**(UMP)** *è forte se* $\lambda \in (-\Lambda, 0) \cup (0, \Lambda)$*.*

(AMP) per il caso parabolico: poco...
Díaz - Fleckinger–Pellé (DCDS 2004): **(AMP)** *definitivo* per problema di Cauchy con condizione di Dirichlet omogenee.
Godoy - Lami Dozo - Paczka (RSMUPT 2002): **(AMP)** per caso parabolico con condizioni di Dirichlet o di Neumann omognee. Se $N = 1$, allora $p > 3$. No **(UAMP)**.
Perché problemi parabolici periodici? Applicazioni biologiche:
Hess (monografia 1991),
Allegretto - Nistri (IMA JMCI 1999),
Quittner - Souplet (monografia 2007),
Fragnelli - M. (DCDS 2008),
Fragnelli (JMAA 2010).

In dimensione maggiore di 1:

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta^m u + \lambda u = f & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \ldots = \frac{\partial \Delta^{m-1} u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(0) = u(T), \end{cases}$$

$m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dominio limitato regolare con $N \leq 2m-1$, così che $C^0([0,T]; H^m(\Omega)) \hookrightarrow C^0(\overline{Q_T})$.
Con condizione tecnica ("$C < 1$") si applica il teorema anche a questo caso.

Risolvente di L è $R_\lambda : L^2(\Omega) \to C^0(\bar{\Omega})$ che è l'inverso di $L + \lambda I$, se esiste. $\tilde{R}_0 : \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{C}}$ è definito da

$$\tilde{u} = \tilde{R}_0 \tilde{f} \Longleftrightarrow L\tilde{u} = \tilde{f},$$

ben definito per ipotesi (4).

Lemma

Esiste $\Lambda_1 > 0$ tale che per ogni $\lambda \in [-\Lambda_1, \Lambda_1] \setminus \{0\}$ il risolvente $R_\lambda : L^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ di L è ben definito. Inoltre esiste $C > 0$ tale che, se $\tilde{f} \in \mathcal{L}$ e $\lambda \in [-\Lambda_1, \Lambda_1] \setminus \{0\}$, allora

$$\|R_\lambda \tilde{f}\|_{C^0(\Omega)} \leq C \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)},$$

dove $C := \frac{M}{1 - \Lambda_1 \|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}} \to \tilde{\mathcal{C}}}}$ e M è la costante in (4).

$\|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}} \to \tilde{\mathcal{C}}}$ denota la norma della restizione dell'operatore $\tilde{R}_0$ da $\tilde{\mathcal{C}}$ a $\tilde{\mathcal{C}}$, ben definito perché $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{L}$.

Dimostrazione: riscrivere $Lu + \lambda u = f$ come il sistema

$$\begin{cases} L\tilde{u} + \lambda\tilde{u} = \tilde{f}, \\ \lambda\overline{u} = \overline{f}. \end{cases}$$

Applicando $\tilde{R}_0$, la prima equazione è

$$(I + \lambda\tilde{R}_0)\tilde{u} = \tilde{R}_0\tilde{f}. \tag{9}$$

Se $|\lambda|\|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}}\to\tilde{\mathcal{C}}} < 1$, allora $I + \lambda\tilde{R}_0$ è invertibile da $\tilde{\mathcal{C}}$ in $\tilde{\mathcal{C}}$ (si noti che $\tilde{R}_0\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}$) e (9) è risolta da

$$\tilde{u} = (I + \lambda\tilde{R}_0)^{-1}\tilde{R}_0\tilde{f}.$$

In conclusione, $R_\lambda f = (I + \lambda\tilde{R}_0)^{-1}\tilde{R}_0\tilde{f} + \frac{\overline{f}}{\lambda}$.

Ora si prenda $\Lambda_1 \in \left(0, \dfrac{1}{\|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}}\to\tilde{\mathcal{C}}}}\right)$. Allora, per tutti i λ tali che $|\lambda| \leq \Lambda_1$, si ha dalla disuguaglianza triangolare, (9) and (4),

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} - \Lambda_1 \|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}}\to\tilde{\mathcal{C}}} \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} - |\lambda| \|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}}\to\tilde{\mathcal{C}}} \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq \|(I + \lambda \tilde{R}_0)\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\tilde{R}_0 \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&= \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Si noti che così si ottiene la stima

$$\Lambda_1 < \frac{1}{\|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}}\to\tilde{\mathcal{C}}}}.$$

Lemma

Sia $k > 0$; allora esiste $\Lambda_2 := \Lambda_2(k) \in (0, \Lambda_1]$ tale che, per ogni $\lambda \in [-\Lambda_2, \Lambda_2] \setminus \{0\}$, $L + \lambda I$ ha un $\boldsymbol{k}$**–(UMP)***. Inoltre* $\boldsymbol{k}$**–(UMP)** *è forte se $\lambda \in (-\Lambda_2, \Lambda_2) \setminus \{0\}$.*

Dimostrazione: se $f \in \mathcal{F}_k$, $f \geq 0$, allora $\overline{f} = \frac{1}{\mu(\Omega)} \|f\|_{L^1(\Omega)}$.
Usando $\lambda \overline{u} = \overline{f}$ si ha

$$\begin{aligned} \lambda u &= \lambda R_\lambda(\tilde{f} + \overline{f}) = \lambda R_\lambda(\tilde{f}) + \overline{f} = \lambda R_\lambda(\tilde{f}) + \frac{1}{\mu(\Omega)} \|f\|_{L^1(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{\mu(\Omega)} \|f\|_{L^1(\Omega)} - |\lambda| \|R_\lambda \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dal Lemma precedente, se $\lambda \in [-\Lambda_1, \Lambda_1] \setminus \{0\}$, allora

$$\begin{aligned}\lambda u &\geq \frac{1}{\mu(\Omega)}\|f\|_{L^1(\Omega)} - |\lambda|\frac{M}{1-\Lambda_1\|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}}\to\tilde{\mathcal{C}}}}\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \left(\frac{1}{\mu(\Omega)} - k|\lambda|\frac{M}{1-\Lambda_1\|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}}\to\tilde{\mathcal{C}}}}\right)\|f\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

La tesi segue con

$$\Lambda_2 = \min\left\{\Lambda_1, \frac{1-\Lambda_1\|\tilde{R}_0\|_{\tilde{\mathcal{C}}\to\tilde{\mathcal{C}}}}{kM\mu(\Omega)}\right\}.$$

$\square$

Il Teorema astratto si dimostra allora prendendo $\Lambda = \Lambda_2(k)$.