Un approccio variazionale non regolare a problemi ellittici con risonanza

*

Claudio Saccon, Università di Pisa

Brescia, 29 aprile 2010

Conferenza in onore di Antonio Marino in occasione del suo settantesimo compleanno

* lavoro in collaborazione con J.N. Corvellec, V.V. Motreanu

Piano della conferenza

- Principi variazionali "quantitativi"
- Cambio di metrica (trasparente se si usa un punto di vista *nonsmooth*)
- Alcune applicazioni a problemi ellittici semilineari con risonanza (nei risultati concreti non si usano funzionali non regolari)

L'idea guida

Cominciamo con un risultato ben noto (**splitting spheres**).
Supponiamo che $X = X_1 \oplus X_2$ con $\dim(X_1) < +\infty$, che $f : X \to \mathbb{R}$ sia un funzionale regolare tale che

$$\sup f(S_1) < \inf f(D_2)$$
$$\sup f(D_1) < \inf f(S_2)$$

dove D_i sono due palle in X_i e S_i le rispettive sfere - $i = 1, 2$. Posto

$$a =: \inf f(D_2) \leq \sup f(D_1) := b$$

e supposto che valga la $(P.S.)_c$ per ogni c in $[a, b]$, allora esiste un punto critico u per f con $f(u) \in [a, b]$.

L'idea guida

IL MOTIVO:
Se non ci fosse nessun punto critico in $f^{-1}([a,b])$ potrei deformare f^b attraverso f^b in $f^{a-\epsilon}$ tenendo fermo $f^{a-\epsilon}$
$\Downarrow$
potrei deformare D_1 (contenuto in f^b) in modo che non intersechi più D_2 (staccato da $f^{a-\epsilon}$), senza passare per S_2 (staccato da f^b) e tenendo fermo S_1 (contenuto in $f^{a-\epsilon}$).
IMPOSSIBILE

L'idea guida

Posso sperare di fare comunque qualcosa anche se non valgono le "linking inequalities" scritte prima. In effetti se

$$a =: \inf f(D_2) \leq \sup f(D_1) := b$$

e se il gradiente di f è "abbastanza lontano da zero" in $f^{-1}([a,b])$, allora posso comunque deformare D_1 in modo che non intersechi più D_2 , senza passare per S_2 (perché S_2 è "lontano" da X_1) e senza che S_1 ("lontano" da X_2) attraversi B_2 - di nuovo impossibile.
Dunque il gradiente di f in $f^{-1}([a,b])$, **non può essere troppo grosso** (in dipendenza da a, b e dai raggi di S_1 e S_2).

Un esempio

Il seguente risultato è dovuto a M. Schechter.

Teorema 1 (di "Sandwich") *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ un funzionale regolare. Siano X_1 e X_2 come prima; supponiamo che*

$$-\infty < a := \inf f(X_2) \leq \sup f(X_1) =: b < +\infty$$

e che valga la $(P.S.)_c$ per ogni c in $[a, b]$. Allora f ha un punto critico u con $f(u) \in [a, b]$

Idea di dimostrazione Prendendo i raggi di S_1 e S_2 arbitrariamente grandi si trova una successione di punti in cui il gradiente di f è piccolo a piacere. Usando la $(P.S.)$ se ne estrae una sottosuccessione che converge a un punto critico.

Formulazione astratta

(X, d) spazio metrico. $f : X \to \mathbb{R}$ continua.

Se $A \subset X$, $u \in X$ si pone $d(u, A) := \inf\{d(u, v) : \ v \in A\}$ $(+\infty$ se $A = \emptyset)$
Se $A, B \subset X$ si pone $d(A, B) := \inf\{d(u, v) : \ u \in A\,,\ v \in B\}$ $(+\infty$ se $A = \emptyset$ o $B = \emptyset)$

Per $\rho > 0$ poniamo $B_\rho(A) := \{u \in X : \ d(u, A) < \rho\}$ (l'intorno aperto di A di raggio ρ) - nel caso $A = \{u\}$ scriviamo semplicemente $B_\rho(u)$

Dato $A \subset X$ chiamiamo *deformazione* di A (in X) una mappa continua $\eta : A \times [0, 1] \to X$ tale che $\eta(u, 0) = u$ per ogni $u \in A$.

Per $c \in \mathbb{R}$, poniamo $[f<c] := \{u \in X : \ f(u) < c\}$

Lemma di deformazione quantitativo

Definizione 1 (pendenza debole) *Se $u \in X$, indichiamo con $|df|(u)$ il numero in $[0, +\infty]$ definito da:*

$$\sup\{\sigma \geq 0 \mid \textit{esistono } \delta > 0, \mathcal{H} : B_\delta(u) \times [0, \delta] \to X \textit{ continua e tale ch}$$
$$d(\mathcal{H}(v,t), v) \leq t\,, \quad f(\mathcal{H}(v,t)) \leq f(v) - \sigma t$$
$$\textit{per ogni } v \textit{ in } B_\delta(u) \textit{ e ogni } t \textit{ in } [0, \delta]\}$$

Se X è una varietà di Finsler di classe C^1e se f è una funzione C^1 su X, allora $|df|(u) = \|f'(u)\|$ per ogni $u \in X$, where $f'(u)$ indica il differenziale di f in u.

Se X è uno spazio di Hilbert ed $f : X \to]-\infty, +\infty]$ è ϕ-convessa allora $|df|(u) = \min\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \partial^- f(u)\}$, dove $\partial^- f$ indica il “sottodifferenziale di Fréchet” di f.

Lemma di deformazione quantitativo

Teorema 2 (di deformazione) *Siano (X, d) spazio metrico, $f : X \to \mathbb{R}$ funzione continua, $C \subset X$ non vuoto, $c \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ e $\sigma > 0$. Supponiamo $f^{-1}([c, b])$ completo per ogni $b \in]c, c + \sigma\rho[$ e*

$$|df|(u) > \sigma \quad \text{per ogni } u \in B_\rho(C) \text{ con } c < f(u) < c + \sigma\rho\,.$$

Allora esiste una funzione continua $\tau : C \cap [f{<}c{+}\sigma\rho] \to [0, +\infty[$ e una deformazione η di $C \cap [f{<}c{+}\sigma\rho]$ tale che

(a) $\tau(u) \leq \max\{(f(u) - c)/\sigma, 0\} < \rho\,;$

(b) $d(\eta(u, t), u) \leq \tau(u)t\,;$

(c) $f(\eta(u, t)) \leq f(u) - \sigma\tau(u)t\,;$

(d) $f(u) \geq c \implies f(\eta(u, 1)) = c\,.$

Nozione di "allacciamento"

Definizione 2 (M. Frigon) *Siano $S_1 \subset D_1$, $S_2 \subset D_2$ quattro sottoinsiemi di X, di cui almeno tre non vuoti e tali che $d(S_1, D_2) > 0$ e $d(S_2, D_1) > 0$. Diciamo che la coppia (D_1, S_1)* allaccia *la coppia (D_2, S_2) se per ogni deformazione η di D_1 che soddisfi*

$$d(\eta(u,t), u) < \min\{d(S_1, D_2), d(S_2, D_1)\} \quad \forall (u,t) \in D_1 \times [0,1] \quad (1)$$

si ha

$$\eta(D_1, 1) \cap D_2 \neq \emptyset \, . \quad (2)$$

Chiaramente se (D_1, S_1) allaccia (D_2, S_2) allora $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Ne segue che, data $f : X \to \mathbb{R}$, si ha:

$$\inf_{D_2} f \leq \sup_{D_1} f \, .$$

Teorema variazionale "quantitativo"

Teorema 3 *Siano* (X, d) *spazio metrico completo,* $f : X \to \mathbb{R}$ *continua e* (D_1, S_1), (D_2, S_2) *due coppie in* X *tali che* (D_1, S_1) *allaccia* (D_2, S_2)*. Poniamo* $\rho := \min\{d(D_2, S_1), d(D_1, S_2)\} > 0$*. Supponiamo che*

$$\sup f(D_1) < +\infty, \qquad \inf f(D_2) > -\infty.$$

Allora dati β_1, β_2 *con* $\beta_2 < \inf_{D_2} f \leq \sup_{D_1} f < \beta_1$ *, esiste* $u \in X$ *tale che*

$$d(u, D_1) < \rho, \quad \beta_2 < f(u) < \beta_1 \quad \textit{and} \quad |df|(u) \leq \frac{\beta_1 - \beta_2}{\rho}\,.$$

Un allacciamento topologico

Supponiamo da ora in avanti che che X sia uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|$ e quindi $d(u,v) = \|v-u\|$.

Sia X_1 sia un sottospazio di dimensione finita con ortogonale $X_2 := (X_1)^\perp$, che supponiamo diverso da $\{0\}$. Per $i = 1,2$ e $\rho > 0$, poniamo

$$D_{i,\rho} := \{u \in X_i : \ \|u\| \le \rho\}\,, \quad S_{i,\rho} := \{u \in X_i : \ \|u\| = \rho\}\,.$$

Proposizione 1 (A.Marino - A.M.Micheletti - A.Pistoia) *Siano ρ_1, $\rho_2 > 0$, e sia η una deformazione di D_{1,ρ_1} in X tale che*

$$\eta(S_{1,\rho_1} \times [0,1]) \cap D_{2,\rho_2} = \emptyset \quad \text{e} \quad \eta(D_{1,\rho_1} \times [0,1]) \cap S_{2,\rho_2} = \emptyset\,.$$

Allora $\eta(D_{1,\rho_1}, 1) \cap D_{2,\rho_2} \ne \emptyset$.

In particolare $(D_{1,\rho_1}, S_{1,\rho_1})$ allaccia $(D_{2,\rho_2}, S_{2,\rho_2})$

Cambio di metrica

Proposizione 2 (cambio di metrica) *Sia* $\beta : [0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ *continua. Se* $u, v \in X$ *poniamo* $\Gamma_{u,v} := \{\gamma : [0,1] \to X, \gamma$ *regolare a tratti*, $\gamma(0) = u, \gamma(1) = v\}$ *e*

$$\tilde{d}(u,v) := \inf \left\{ \int_0^1 \beta(\|\gamma(t)\|)\|\gamma'(t)\|\,dt : \ \gamma \in \Gamma_{u,v} \right\}.$$

Allora $\tilde{d}$ *è una metrica su* X *topologicamente equivalente a* d *e si ha*

(a) *Se* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \beta(s)\,ds = +\infty$, *allora* $(X, \tilde{d})$ *è completo.*

(b)

$$\tilde{d}(u,0) = \int_0^{\|u\|} \beta(s)\,ds \qquad \forall u \in X.$$

(c) *Se* $f : X \to \mathbb{R}$ *è continua, allora per ogni* $u \in X$ *si ha*

$$|\tilde{d}f|(u) = \frac{|df|(u)}{\beta(\|u\|)},$$

($|df|$ *e* $|\tilde{d}f|$ *indicano la pendenza di* f *rispetto a* d *e rispetto a* $\tilde{d}$*).*

Cambio di metrica

Osservazione 1 *Il cambio di metrica permette di ottenere teoremi variazionali diversi a seconda dalla scelta di β, se si aggiunge l'ipotesi che valga la proprietà di Palais Smale rispetto a $\tilde{d}$.*
Se $\beta(s) = \dfrac{1}{1+s}$ tale di condizione diventa la ben nota condizione $(C.P.S)$ di Cerami.

Per avere dei teoremi quantitativi con $\tilde{d}$ è importante la seguente proposizione.

Proposizione 3 *Sia $\beta : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ continua e tale che $s\beta(s) \to +\infty$ per $s \to +\infty$, e sia $\tilde{d}$ la metrica definita come sopra mediante la funzione β. Per $i, j = 1, 2$, $i \neq j$ si ha:*

$$\lim_{\rho \to +\infty} \tilde{d}(S_{i,\rho}, D_{j,\rho}) = +\infty.$$

Nota La proposizione non vale per la metrica di Cerami, in cui $\beta(s) \sim s$.

Teorema quantitativo rispetto alla nuova metrica

Teorema 4 *Siano $f : X \to \mathbb{R}$ continua e $\beta : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ continua e tale che $s\beta(s) \to +\infty$ per $s \to +\infty$. Supponiamo che*

$$-\infty < a := \inf_{X_2} f \;\leq\; \sup_{X_1} f =: b < +\infty\,.$$

Allora esistono un numero $c \in [a, b]$ e una successione (u_h) in X tali che

$$f(u_h) \to c \quad \text{e} \quad \frac{|df|(u_h)}{\beta(\|u_h\|)} \to 0 \quad \text{per } h \to +\infty\,.$$

Teorema quantitativo rispetto alla nuova metrica

Proposizione 4 *Sia $\mu > 0$ e consideriamo la metrica d_μ corrispondente a $\beta_\mu(s) := (1+s)^{\mu-1}$:*

$$d_\mu(u,v) := \inf\left\{\int_0^1 (1+\|\gamma(t)\|)^{\mu-1}\|\gamma'(t)\|\,dt : \ \gamma\in\Gamma_{u,v}\right\}$$

Siano $i,j = 1,2$, $i \neq j$; allora:

(a) *se $\mu \geq 1$ si ha: $d_\mu(S_{i,\rho}, D_{j,\rho}) = \frac{1}{\mu}(1+\rho)^\mu$;*

(b) *se $0 < \mu < 1$ e $\rho \geq 1$ si ha: $d_\mu(S_{i,\rho}, D_{j,\rho}) \geq \rho^\mu\, d_\mu(S_{i,1}, D_{j,1})$.*

Teorema quantitativo rispetto alla nuova metrica

Teorema 5 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua e limitata inferiormente sui limitati di X_2; sia inoltre $\mu > 0$. Supponiamo che*

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h^\mu}\left(\sup_{D_{1,h}} f - \inf_{D_{2,h}} f\right) = 0\,.$$

Allora esiste una successione (u_h) in X tale che

$$\inf_{X_2} f \le \liminf_{h\to\infty} f(u_h) \le \limsup_{h\to\infty} f(u_h) \le \sup_{X_1} f$$

e

$$\lim_{h\to\infty} \frac{|df|(u_h)}{(1+\|u_h\|)^{\mu-1}} = 0\,.$$

Problemi Ellittici Semilineari con Risonanza

Il problema: dato Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ si cerca u soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = g(\cdot, u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

dove $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di Carathéodory. Poniamo

$$G(x,s) := \int_0^s g(x,\sigma)\, d\sigma$$

$$L_\pm(x) := \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{2G(x,s)}{s^2}, \quad K_\pm(x) := \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{2G(x,s)}{s^2},$$

$$l_\pm(x) := \liminf_{s\to\pm\infty} \frac{g(x,s)}{s}, \quad k_\pm(x) := \limsup_{s\to\pm\infty} \frac{g(x,s)}{s},$$

e $L := \min\{L_+, L_-\}$, $K := \max\{K_+, K_-\}$, $l := \min\{l_+, l_-\}$, $k := \max\{k_+, k_-\}$.
Inoltre indichiamo con $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_2 \le \cdots$ gli autovalori di $-\Delta$ in $H^1_0(\Omega)$.

Nozioni di risonanza

Sia j intero. Chiamiamo ipotesi di "risonanza debole" la condizione

$$\lambda_j \leq L(x) \leq K(x) \leq \lambda_{j+1} \qquad \text{a.e. in } \Omega \qquad (WR)_{j,j+1}$$

mentre chiamiamo ipotesi di "risonanza forte" la condizione

$$\lambda_j \leq l(x) \leq k(x) \leq \lambda_{j+1} \qquad \text{a.e. in } \Omega \qquad (SR)_{j,j+1}$$

È semplice verificare che $l \leq L \leq K \leq k$ da cui $(SR)_{j,j+1}$ implica $(WR)_{j,j+1}$.
(forse non è un nome appropriato ...)

Sguardo (sommario) alla letteratura sul problema

- Costa - Oliveira (1988) provano che in ipotesi di risonanza forte esiste un soluzione se esistono due insiemi di misura positiva E' ed E'' tali che $\lambda_i < l$ su E' e $k < \lambda_{i+1}$ su E''.
- Costa - Magalhaes (1994) considerano la risonanza debole e introducono delle condizioni di “non quadraticità” chiedendo che la funzione $H(x,s) := sg(x,s) - 2G(x,s)$ sia lontana da zero (in un senso opportuno) per s grande.
- Furtado - Silva (2001) generalizzano i risultati precedenti (suggerendo alcune delle condizioni di non quadraticità più generali che consideriamo anche noi) - però si interessano al problema dell' esistenza di soluzioni non banali per cui usano la teoria di Morse che richiede ipotesi più restrittive.

Ipotesi di crescita

- Esistono $a \in L^{2^{*\prime}}(\Omega)$, $b \geq 0$ e $1 < p \leq 2^*$ tali che (cond. di crescita)

$$|g(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{p-1} \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \qquad (g)$$

- Esistono $a \in L^{r_1}(\Omega)$ e $b \in L^{r_2}(\Omega)$, con $r_1 \geq 2^{*\prime}$ e $r_2 \geq (2^*/2)'$ tali che

$$|g(x,s)| \leq a(x) + b(x)|s| \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \qquad (\hat{g})$$

- Esiste $a_0 \in L^1(\Omega)$ tale che

$$\pm(g(x,s)s - 2G(x,s)) \geq -a_0(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (G.g)^{\pm}$$

- Esistono $a_1 \in L^1(\Omega)$ e $b_1 \in L^{n/2}(\Omega)$ tali che

$$\pm 2G(x,s) \leq a_1(x) + b_1(x)s^2 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (G)^{\pm}$$

Nota Le scritture con"$\pm$" introducono delle coppie di condizioni (unilatere).

Ipotesi di “non quadraticità”

- Poniamo

$$\underline{H}_\pm(x) := \liminf_{s\to-\infty}[\pm(g(x,s)s - 2G(x,s))]$$

$$\overline{H}_\pm(x) := \liminf_{s\to\infty}[\pm(g(x,s)s - 2G(x,s))]$$

$$H_\pm(x) := \min(\underline{H}_\pm(x), \overline{H}_\pm(x)) = \liminf_{|s|\to\infty}[\pm(g(x,s)s - 2G(x,s$$

(se vale $(G.g)^\pm$ allora $H_\pm(x) > -\infty$ a.e. x in Ω). Se $j \geq 2$

$$\alpha_j := \text{mis}\,(\Omega) - \left(\frac{S}{\lambda_j}\right)^{N/2} \quad \text{dove } S := \inf\left\{\frac{\|u\|^2}{\|u\|^2_{2^*}} \,:\; u \in H^1_0(\Omega),\; u \neq 0\right\}$$

($\alpha_j > 0$) mentre poniamo $\alpha_1 = 0$. Consideriamo l'ipotesi:

$$\text{mis}\,(\{x \in \Omega :\; H_\pm(x) = +\infty\}) > \alpha_j \qquad ((NQ_j)^\pm)$$

Ipotesi di “non quadraticità”

- Un altra ipotesi - più debole di (NQ_1). In questo caso si guarda solo cosa succede su opportuni autospazi. Posto

$$E_j := \mathrm{Ker}(-\Delta - \lambda_j I)$$

chiediamo che

$$\mathrm{mis}(\{\overline{H}_- = +\infty,\, u > 0\} + \mathrm{mis}(\{\underline{H}_- = +\infty,\, u < 0\}) > 0\, \forall u \in E_j \setminus \{0\}. \qquad (NQ_j)_0^-$$

L'ipotesi NQ più forte sarà accoppiata con la risonanza debole, mentre quella più debole sarà accoppiata alla risonanza forte.

Esistenza di una soluzione in condizione di risonanza debole

Teorema 6 *Supponiamo che valga la (g) con $p < 2^*$. Sia $i \in \mathbb{N}$ e supponiamo che*

$$\lambda_i \leq L \leq K \leq \lambda_{i+1}\,,, \qquad (WR)_{i,i+1}$$

(risonanza "debole"). Valgano inoltre le $(G.g)^+$, $(NQ_{i+1})^+$ e $(G)^-$ e

$$(\lambda_i - L_+)u^+ + (\lambda_i - L_-)u^- \neq 0 \quad \forall u \in \mathrm{Ker}(-\Delta - \lambda_i I) \setminus \{0\}\,. \quad (E_i)$$

Allora il problema (P) ha una soluzione.

Nota Se vale $(G.g)^+$ (e lo stesso se vale $(G.g)^+$) si può dimostrare che $L^- = K^-$ e $L^+ = K^+$ e quindi nella condizione (E_i) non cambierebbe nulla se usassimo K^- e K^+. Inoltre $L = \min(L^-, L^+)$ e $K = \max(L^-, L^+)$.
Notiamo anche che la condizione (E_1) equivale semplicemente a dire che λ_1 non è identicamente eguale né a $L^- = K^-$ né a $L^+ = K^+$.

Idea di dimostrazione

Poniamo

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega G(x,u)\, dx$$

e - se e_j sono le autofunzioni di $-\Delta$

$$X_1 := \operatorname{span}\{e_1,\dots,e_i\}, \quad X_2 := \overline{\operatorname{span}\{e_{i+1},\dots\}}$$

(I) Si vede che

$$-\infty < \inf f(X_2) \leq \sup f(X_1) < +\infty$$

.

(II) Sia $\Omega_+ := \{H_+(x) = +\infty\}$. Poniamo per $\epsilon > 0$

$$E_i := \{u \in H_0^1(\Omega \mid \|u\| \leq 1, \lambda_i \|u\|_2^2 \geq 1 - \epsilon\}$$

A causa dell'ipotesi di non quadraticità esiste $\epsilon > 0$ per cui

$$\operatorname{mis}(\{x \in \Omega_+ \mid u(x) \neq 0\}) > 0 \qquad \forall u \in E_i$$

Idea di dimostrazione

(III) Definiamo $\omega :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\omega(s) := \inf \left\{ \int_\Omega (g(x,\rho u) - 2G(x,\rho u))\, dx \mid u \in E_i, \rho \geq s \right\}.$$

Allora ω è non decrescente e - a causa del punto (II) - $\omega(s) \longrightarrow +\infty$ per $s \longrightarrow +\infty$. È anche facile trovare una $\beta :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ tale che

$$\lim_{s \to +\infty} s\beta(s) = +\infty, \qquad s\beta(s) \leq \sqrt{\omega(s)} \text{ per } s \text{ grande.}$$

Per i teoremi "quantitativi" esiste una successione (u_h) tale che

$$I(u_h) \text{ è limitato} \qquad \frac{I'(u_h)}{\beta(\|u_h\|)} \longrightarrow 0$$

(IV) Si dimostra che (u_h) ammette una successione convergente; come al solito il punto cruciale è verificare che (u_h) è limitata. Supponiamo al contrario che $\rho_h = \|u_n\| \longrightarrow +\infty$ e poniamo $\hat{u}_h := u_h/\rho_h$.

Idea di dimostrazione

Si può supporre che $\hat{u}_h \to \hat{u}$ in $L^2(\Omega)$. Dato che $I(u_h)$ è limitato e che $\|u_h\|^2 = 2I(u_h) - \int_\Omega G(x,u_h)\,dx$ - dividendo per ρ_h^2 si ha, per h grande

$$1 = \lim_{h\to+\infty}\left(1 - \frac{I(u_h)}{\rho_h^2}\right) = \lim_{h\to+\infty}\int_\Omega \frac{2G(x,\rho_h\hat{u}_h)}{\rho_h^2} \le \lambda_{i+1} \lim_{h\to+\infty} \|\hat{u}_h\|_2^2$$

da cui $\hat{u}_h \in E_{i+1}$. Per la definizione di ω

$$2I(u_h) - I'(u_h)(u_h) = \int_\Omega (g(x,\rho_h\hat{u}_h)\rho_h\hat{u}_h - 2G(x,\rho_h\hat{u}_h)) \ge \omega(\rho_h) \ge \rho_h^2\beta($$

dunque

$$\frac{2I(u_h) - I'(u_h)(u_h)}{\rho_h\beta(\rho_h)} \ge \rho_h\beta(\rho_h) \;\to\; +\infty\,,$$

ma d'altra parte per le proprietà di u_h e di β deve essere

$$\frac{2I(u_h) - I'(u_h)(u_h)}{\rho_h\beta(\rho_h)} \;\to\; 0\,,$$

da cui l'assurdo. A questo punto la tesi segue facilmente.

Altri teoremi

Teorema 7 ("simmetrico" del precedente) *Supponiamo che valga la (g) con $p < 2^*$. Sia $i \in \mathbb{N}$ e supponiamo che*

$$\lambda_i \leq L \leq K \leq \lambda_{i+1} \, , , \qquad (WR)_{i,i+1}$$

(risonanza "debole"). Valgano inoltre le $(G.g)^-$, $(NQ_{i+1})^-$ e $(G)^+$ e

$$(\lambda_{i+1}-L_+)u^+ + (\lambda_{i+1}-L_-)u^- \neq 0 \quad \forall u \in \mathrm{Ker}(-\Delta-\lambda_{i+1}I)\setminus\{0\} \, . \qquad (E_{i+1})$$

Allora il problema (P) ha una soluzione.

Corollario 1 *Valga la (g) with $p < 2^*$. Supponiamo che per un $i \in \mathbb{N}$ si abbia $L = K = \lambda_i$ e che valga una tra i seguenti blocchi di ipotesi*

(i) $i \geq 2$, $(G.g)^+$, $(NQ_i)^+$, e $(G)^-$;

(ii) $(G.g)^-$, $(NQ_{i+1})^-$, e $(G)^+$.

Allora (P) ha una soluzione.

Esistenza di una soluzione in condizione di risonanza forte

Teorema 8 *Supponiamo che valga la* $(\hat{g})$ *con* $r_1 > 2^{*\prime}$ *e* $r_2 > (2^*/2)'$ *e che valga la* $(G.g)^+$. *Supponiamo inoltre che, per* $i \in \mathbb{N}$*, si abbia*

$$(SR)_{i,i+1} \qquad\qquad \lambda_i \le l \le k \le \lambda_{i+1}\,,$$

e che sia verificato uno dei due blocchi di ipotesi

(i) $(NQ_1)^+$, *and* $(G_i)^-$ *;*

(ii) $(NQ_{i+1})^+_0$ *and* (E_i) *.*

Allora (P) *ha una soluzione.*

Altri teoremi

Teorema 9 ("simmetrico" del precedente) *Supponiamo che valga la* $(\hat{g})$ *con* $r_1 > 2^{*\prime}$ *e* $r_2 > (2^*/2)'$ *e che valga la* $(G.g)^+$. *Supponiamo inoltre che, per* $i \in \mathbb{N}$, *si abbia*

$$(SR)_{i,i+1} \qquad\qquad \lambda_i \leq l \leq k \leq \lambda_{i+1}\,,$$

e che sia verificato uno dei due blocchi di ipotesi

(i) $(NQ_1)^-$, *and* $(G_{i+1})^+$;

(ii) $(NQ_i)^-_0$ *and* (E_{i+1}).

Allora (P) *ha una soluzione.*

Altri teoremi

Se $l = k$ si puó rimuovere la condizione su r_1 e r_2.

Corollario 2 *Valga la* $(\hat{g})$. *Supponiamo che per un certo* $i \in \mathbb{N}$ *sia* $l = k = \lambda_i$ *e che valga uno tra i due blocchi di ipotesi*

(i) $i \geq 2$, $(G.g)^+$, e $(NQ_i)_0^+$;

(ii) $(G.g)^-$ e $(NQ_i)_0^-$.

Allora (P) *ha una soluzione.*

Altra ipotesi di nonquadraticità

Sia μ un numero con $0 < \mu \leq 2$. Consideriamo una versione "quantificata da μ" di alcune delle ipotesi precedenti.

- Esistono $a_\mu \in L^1(\Omega)$ e $b_\mu \in L^{(2^*/\mu)'}(\Omega)$ tali che

$$\pm(g(x,s)s - 2G(x,s)) \geq -a_\mu(x) - b_\mu(x)|s|^\mu \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \qquad (G.g)^{\pm}_{\mu}$$

- Posto

$$\underline{H}_{\mu,\pm}(x) := \liminf_{s \to -\infty} \frac{\pm(g(x,s)s - 2G(x,s))}{|s|^\mu},$$

$$\overline{H}_{\mu,\pm}(x) := \liminf_{s \to +\infty} \frac{\pm(g(x,s)s - 2G(x,s))}{|s|^\mu},$$

consideriamo le condizioni (di non quadraticità)

$$H_{\mu,\pm}(x) := \min\{\overline{H}_{\mu,\pm}(x), \underline{H}_{\mu,\pm}(x)\} > 0 \qquad \text{for a.e. } x \in \Omega. \qquad (NQ)^{\pm}_{\mu}$$

Altri teoremi

Dato j intero consideriamo inoltre le seguenti ipotesi dipendenti da μ e da j.

- $$(G_j)^{\pm}_{\mu} \begin{cases} \bullet \text{Esistono } \tilde{a}_\mu \in L^1(\Omega) \text{ e } \tilde{b}_\mu \in L^{(2^*/\mu)'}(\Omega) \text{ tale che per a.e. } x \in \Omega \text{ e per ogni } s \in \mathbb{R} \\ \qquad \pm 2G(x,s) \leq \pm\lambda_j s^2 + \tilde{b}_\mu(x)|s|^\mu + \tilde{a}_\mu(x)\,; \\ \bullet \ \limsup\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{\pm(2G(x,s)-\lambda_j s^2)}{|s|^\mu} \leq 0 \quad \text{for a.e. } x \in \Omega\,. \end{cases}$$

- $$\int_\Omega (\overline{H}_{\mu,\pm}(u^+)^\mu + \underline{H}_{\mu,\pm}(u^-)^\mu) > 0 \quad \text{for every } u \in E_j \setminus \{0\}\,. \qquad (NQ_j)^{\pm}_{\mu}$$

Altri teoremi

Teorema 10 *Siano $0 < \mu \leq 2$ e $i \in \mathbb{N}$. Supponiamo che valgano le condizioni $(\hat{g})$, $(G.g)_\mu^+$, $(G_{i+1})_\mu^+$, che valga una tra $(G_i)^-$ e $(E_i)^-$, come pure uno tra i due blocchi di ipotesi:*

(i) $(NQ)_\mu^+$;

(ii) $(SR)_{i,i+1}$, $(NQ_i)_\mu^+$, *and* $(NQ_{i+1})_\mu^+$.

Allora il problema (P) ammette una soluzione.

Anche questo teorema ammette un simmetrico rimpiazzando opportunamente i "$+$" e i "$-$" nelle ipotesi.