PAVIA – 23 settembre 2004 (Induzione e disuguaglianze)

1. Dando per assodato il ben noto risultato sulla somma degli angoli di un triangolo, dimostrare che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati vale $n-2$ angoli piatti.

2. Dimostrare che per ogni numero naturale n vale
$$1 \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2\,.$$

3. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ e per ogni reale $p \neq 1$ si ha
$$\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} = \frac{np^{n+1} - (n+1)p^n + 1}{(p-1)^2}\,.$$

4. Sia $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Quanto fa $f(f(x))$? Quanto fa $\underbrace{f(f\ldots(f}_{n\text{volte}}(x)\ldots)$?

5. Sia a un numero reale tale che $a + \frac{1}{a}$ sia un intero. Dimostrare che, per ogni intero $n \geq 1$, $a^n + \frac{1}{a^n}$ è intero.

6. Dimostrare che la disuguaglianza $8x^2y^2 \leq (x^2+y^2)(x+y)^2$ è valida per tutti i numeri reali x, y positivi.

7. Su una circonferenza un certo numero di archi viene colorato di rosso. La somma delle lunghezze di questi archi è minore di $\frac{1}{6}$ della lunghezza della circonferenza. Dimostrare che esiste un esagono regolare inscritto tale che nessuno dei suoi vertici sia colorato di rosso.

8. Dato un quadrato Q di lato unitario, siano P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 dei punti interni a Q. Sia d_{ij} la distanza fra P_i e P_j. Si dimostri che almeno una delle distanze d_{ij} è minore di $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Si può sostituire $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ con un numero più piccolo?

9. Dimostrare che la disuguaglianza $(x+2y)^3 \geq 27xy^2$ è vera per tutti i numeri reali positivi x e y.

10. Per quanti interi positivi n risulta $5^n \leq 2003 \cdot n$? Fornire una dimostrazione del risultato.

11. Dimostrare che il minimo di $(x+y)(x+z)(y+z)$ sotto le condizioni $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $xyz = 1$ vale 8.

12. Siano x, y, z numeri reali positivi. Si dimostri che
$$8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)\,.$$

13. Verificare che per ogni terna x, y, z di reali positivi tali che $x+y+z=1$, si ha:
$$xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}\,.$$

14. Siano x, y, z reali positivi, dimostrare che vale la seguente relazione:
$$xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$$

15. Trovare il valore massimo di x^5yz sapendo che x, y, z sono numeri reali positivi tali che $x+y+z=1$

PAVIA – 23 settembre 2004 (Aritmetica)

1. La frazione $\dfrac{21n+2}{28n+3}$ è sempre irriducibile?

2. È vero che se 13 divide $a+4b$, con a e b interi, allora divide anche $10a+b$?

3. Il numero 2004 può esser somma di due quadrati perfetti?

4. Dimostrare il seguente criterio di divisibilità per 7. Dato un numero scritto in base decimale, separiamo il blocco costituito da tutte le cifre tranne l'ultima. A questo sottraiamo il doppio dell'ultima cifra. Il numero che otteniamo è divisibile per 7 esattamente se quello dato lo era.

5. Trovare, se esiste, il più piccolo numero intero positivo che diviso per 5 dà resto 1, diviso per 6 dà resto 2 e diviso per 7 dà resto 3.

6. Quante sono le soluzioni intere del sistema $\begin{cases} 2x+5y=181 \\ xy>x+y \end{cases}$?

7. Esistono numeri primi p,q,r,s,t tali che $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$?

8. È vero che $n^{20}-n^2$ è sempre divisibile per 266? e per 532? e per 1064?

9. Determinare i valori del primo p per cui il polinomio $x^2+px-84x$ ha radici intere.

10. Per quali valori interi m ed n è verificata $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=m^2$?

11. Il numero $1111\ldots111$, dove la cifra 1 è ripetuta 3^n volte, è divisibile per 3^n?

12. Per quali interi n il numero n^5+n^4+1 è primo?

13. Provare che $a+b+c$ è divisibile per 6 se e solo se $a^3+b^3+c^3$ è divisibile per 6.

14. Esistono 2004 interi consecutivi ciascuno dei quali è divisibile per un cubo >1?

15. Trovare tutte le terne (x,y,z) di numeri interi tali che $x^3+5y^3+25z^3=5xyz$.

16. Dimostrare che comunque siano presi n numeri interi è sempre possibile sceglierne un sottoinsieme non vuoto in modo che la somma degli elementi scelti sia multipla di n.

17. Dimostrare che tutti i numeri della forma p^4-q^4, dove p e q sono numeri primi di almeno due cifre, sono divisibili per 240.

18. Dimostrare che comunque si scelgano 17 numeri interi a_1, a_2, …, a_{17} è possibile selezionarne due, ad esempio a_i e a_j, in modo che $a_i+a_{i+1}+\ldots+a_j$ sia divisibile per 17.

19. Per quali interi n il numero $1^n+2^n+3^n+4^n+5^n$ è divisibile per 5?

20. Dimostrare che esiste un numero di Fibonacci che termina per 00.

21. Risolvere il sistema di 100 equazioni in 100 incognite

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \\ \ldots \\ x_{98}+x_{99}+x_{100}=0 \\ x_{99}+x_{100}+x_1=0 \\ x_{100}+x_1+x_2=0 \end{cases}.$$

PAVIA – 24 settembre 2004 (Geometria)

1. Un clown possiede un abito di colore rosso dalla parte esterna e blu da quella interna. Per renderlo più variopinto, egli taglia dal vestito un pezzo di stoffa di forma triangolare, pensando di ricucirlo con il blu all'esterno. Può egli, tagliando il triangolo in più parti, ricucire queste in modo da ottenere un triangolo che possa ricoprire il buco con il blu all'esterno?

2. Dato un triangolo ABC, con $AC = BC$, si prende un punto M su AB e si tracciano le perpendicolari a BC ed AC passanti per M, che intersecano BC e AC (o i loro prolungamenti) in D ed E. Dimostrare che, al variare di M, $MD + ME =$ costante (indipendentemente dalla posizione di M su AB).

3. Un triangolo ABC è tale che esiste un cerchio che passa per tutti i punti che dividono ciascun lato del triangolo in tre parti uguali. Provare che ABC è equilatero.

4. Determinare l'area di un triangolo che ha due mediane ortogonali lunghe rispettivamente 10 e 15.

5. Dato un triangolo scaleno ABC, una circonferenza passante per B e per C interseca AB in P e AC in R. Detta Q l'intersezione fra i prolungamenti di PR e di BC, mostrare che $\frac{QC}{QB} = \frac{RC \cdot AC}{PB \cdot AB}$.

C

A B

6. Dimostrare che in ogni triangolo la somma delle lunghezze delle mediane è minore del perimetro.

7. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze che si intersecano nei punti A e B. Sia t una tangente comune alle due circonferenze e siano C e D i punti di tangenza. Dimostrare che il segmento CD è dimezzato dalla retta passante per A e B.

8. Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A. L'altezza condotta da A ha lunghezza 12, mentre la bisettrice condotta da A ha lunghezza 13. Determinare la lunghezza della mediana condotta da A.

9. Dato un triangolo acutangolo ABC, siano M_1, M_2, M_3 i punti medi dei lati, O il centro del cerchio circoscritto di raggio R e r il raggio del cerchio inscritto. Dimostrare che $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$.

10. Dato un punto P all'interno di un angolo di ampiezza minore di 90°, si tracci la retta passante per P che, intersecando i lati dell'angolo nei punti M ed N, rende massimo $\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN}$.

11. $ABCDE$ è un pentagono regolare. Sia P un punto del cerchio circoscritto appartenente all'arco AB. Dimostrare che $AP + BP + DP = CP + EP$.

12. Siano AD, BE, CF tre ceviane del triangolo ABC passanti per un punto interno P. Dimostrare che $\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PD}$.

13. Nella figura a fianco il cerchio grande ha centro in O e raggio 1. Quanto vale l'area del cerchio tratteggiato?

14. Una scatola di cartone ha la forma di un tetraedro. Si taglia questa scatola secondo tre spigoli che concorrono in uno stesso vertice, e appiattendo le facce si ottiene lo sviluppo del tetraedro. Ora questo sviluppo è un quadrato di lato 30 cm. Qual era il volume della scatola di partenza?

O

PAVIA – 24 settembre 2004 (Combinatoria)

1. In quanti modi diversi si possono disporre 6 persone intorno ad un tavolo circolare?

2. Nel gioco del lotto vengono estratti successivamente 5 numeri compresi tra 1 e 90. Qual è la probabilità che i 5 numeri estratti siano in ordine crescente?

3. Si tira n volte una moneta. Dire, al variare di n, se è più probabile che il numero di teste sia pari o dispari.

4. Quante figurine bisogna comprare in media per completare un album da 200?

5. Un'urna contiene 10 palline nere, 6 bianche e 4 rosse.
   i) Calcolare la probabilità che, estraendo 3 palline, queste siano tutte e tre rosse.
   ii) Calcolare la probabilità che, estraendo 4 palline, fra queste ve ne siano almeno tre rosse.
   iii) Calcolare la probabilità che, estraendo 4 palline, ve ne siano 2 nere, 1 bianca e 1 rossa.

6. Abbiamo a disposizione un mazzo di carte francesi con le figure dal 7 incluso all'asso. Nel gioco del poker (con 5 carte per giocatore)
   1) qual è la probabilità di avere una doppia coppia servita?
   2) qual è la probabilità di avere una coppia semplice?
   3) qual è la probabilità di non avere alcun punto?

7. In una mano di poker abbiamo la fortuna di pescare un tris servito. Puntando a ottenere un full, conviene cambiare una o due carte?
   La risposta data dipende dal numero di carte del mazzo (52 o 48 o 44 o meno ancora)?

8. Giorgio e Piero si trovano ogni settimana per sfidarsi a Risiko. La loro abilità è la stessa, quindi ognuno ha, ogni volta, il 50% di probabilità di vincere. Qual è la probabilità che dopo 10 partite Giorgio abbia almeno 3 vittorie in più di Piero?

9. Tre gentiluomini A, B, e C si sfidano in un duello a tre. A colpisce con probabilità $\frac{1}{3}$, B con probabilità $\frac{2}{3}$ e C colpisce sempre. Decidono di sparare uno alla volta, a turno, nell'ordine A, B, C, A, B, C,... fino a che ne sopravvive uno solo.
   Ciascuno desidera uccidere i suoi avversari e sceglie il suo bersaglio nella maniera a lui più conveniente. Si dica se per A è più conveniente indirizzare il suo primo sparo in aria, o verso B o verso C.

10. Le sei facce di un cubo vengono colorate ciascuna di un diverso colore. Quanti cubi "diversi" si possono ottenere usando i sei colori A, B, C, D, E, F?
    Quanti ottaedri regolari "diversi" si possono ottenere colorando le facce con otto colori diversi? (NB: due cubi (ottaedri) si considerano "diversi" se non esiste una rototraslazione che porta l'uno nell'altro.)

11. Si scelgono a caso due punti X e Y su un segmento AB. Qual è la probabilità che i tre segmenti AX, XY e YB possano essere i lati di un triangolo?

12. Siano date N carte con N numero naturale qualunque. Si dispongano tutte le carte in fila (con la faccia verso l'alto) e si comincino a rivoltare tutte le carte che occupano un posto multiplo di 2, poi tutte le carte che occupano un posto multiplo di 3, tutte le carte che occupano un posto multiplo di 4, ... fino ad N. Dimostrare che il numero di carte che rimangono con la faccia rivolta verso l'alto è la parte intera di $\sqrt{N}$.

PAVIA – 25 settembre 2004 (Algebra)

1. Sia α una radice (complessa) del polinomio $x^4 + x^2 + 1$. Calcolare $\dfrac{\alpha^{2002}}{\alpha^2 + 1}$.

2. Sia α una radice reale di $x^3 - x + 1$. Quanto vale $\alpha^9 + 3\alpha^6 + 2\alpha^3$?

3. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi, e siano a, b, c, d, numeri interi distinti tali che $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 12$. Dimostrare che non esiste alcun intero n tale che $p(n) = 23$.

4. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi con tre radici tutte intere e distinte fra loro. Sia n un intero tale che $P(n) \neq 0$. Quanto vale al minimo $|P(n)|$?

5. Si determinino i polinomi $p(x)$ tali che $(x - 1)p(x) = c \cdot (x - 16)p(2x)$.

6. Determinare tutti i parallelepipedi con spigoli interi a, b, c tali che la somma dei tre spigoli è 28, la superficie laterale è pari a 306 e il volume è 126.

7. Siano α, β, γ le radici del polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 15$. Si determini un polinomio di terzo grado avente come radici $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$.

8. Il prodotto di due radici di $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$ vale -32. Quanto vale k?

9. Se $x + y = 30$ e $x^3 + y^3 = 8100$, quanto vale $x^2 + y^2$?

10. Sia $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Calcolare il resto della divisione di $p(x^5)$ per $p(x)$.

11. Dati quattro numeri distinti a, b, c e d, risolvere il sistema
$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3t = a^4\,, \\ x + by + b^2z + b^3t = b^4\,, \\ x + cy + c^2z + c^3t = c^4\,, \\ x + dy + d^2z + d^3t = d^4\,, \end{cases}$$
per x, y, z e t.

12. Sia $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ un polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti interi. Dimostrare che esistono infiniti numeri interi positivi m tali che $f(m)$ non è un numero primo.

13. Il numero 10101 non è un numero primo. Dimostrare che non lo è nemmeno se si cambia la base del sistema di numerazione.

14. Per quale valore k il polinomio $x^5 + y^5 + z^5 - k(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2)$ è divisibile per $x + y + z$?

15. Siano $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ polinomi tali che $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)$ è divisibile per $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Dimostrare che $P(x)$ è divisibile per $x - 1$.

16. Dire se è possibile piastrellare un quadrato $n \times n$ usando mattonelle 2×2 e 3×3.

17. Determinare tutti i rettangoli $h \times k$ tassellabili con tessere del tipo .

18. Si consideri l'usuale scacchiera 8×8. Ovviamente non è possibile ricoprirla con tessere rettangolari 3×1 semplicemente perché 64 non è divisibile per 3, ma dà resto 1. È tuttavia possibile ricoprirla con 21 di questi tasselli, lasciando una casella vuota. Esibire una siffatta tassellazione e determinare tutte le caselle della scacchiera che possono fungere da casella vuota in una qualsiasi di queste tassellazioni.

PAVIA – 25 settembre 2004 (Prova individuale)

1. ????
2. ????
3. ????
4. ????
5. ????
6. ????

PAVIA – 25 settembre 2004 (Gara a squadre)

Problemi dimostrativi

1. Dimostrare che $\frac{a^3+b^3}{a^2b^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

2. Costruiamo una successione di triangoli T_n nel modo seguente. T_0 è un triangolo assegnato con angoli di ampiezza α, β e γ. Per ogni $n \geq 0$, T_{n+1} è il triangolo che ha per vertici i punti di contatto tra T_n ed il suo cerchio inscritto. Esprimere le ampiezze degli angoli di T_n in dipendenza di α, β, γ ed n.

3. Dimostrare che comunque vengano assegnati 9 numeri interi se ne possono scegliere 5 in modo che la loro somma sia un multiplo di 5.

4. Quanti sono i numeri di sei cifre con la proprietà che le loro cifre sono disposte in ordine crescente da sinistra a destra?

5. Il triangolo ABC ha i lati di lunghezza $AB = 6$, $AC = 7$ e $BC = 8$. Se P è quel punto sulla circonferenza circoscritta al triangolo tale che BP biseca l'angolo $A\hat{B}C$, quanto misura BP?

6. Indicato con $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$, calcolare
$$\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{S_{2004}}}$$

7. In un triangolo acutangolo un'altezza divide il lato opposto in due segmenti di lunghezza 12 e 15. Un'altra altezza divide il lato opposto in due segmenti di lunghezza a e b. Per quali valori di a e b il triangolo risulta avere tutti i lati di lunghezza intera?

8. Se r ed s sono le radici di $x^2 + 3x + 1 = 0$, quanto vale $8r^4 - 21s^3$?

9. Dimostrare che se a, b, c sono i lati di un triangolo, allora
$$a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \leq 3abc\,.$$
Quando vale l'uguaglianza?

10. Il numero 6300 può essere scritto in 17 modi diversi come somma di numeri interi consecutivi. Qual è il più piccolo numero che compare in almeno una delle 17 scritture?

PAVIA – 25 settembre 2004 (Gara a squadre)

Problemi a risposta numerica

1. In un triangolo rettangolo due altezze misurano 4 e 5. Quanto può valere al massimo la terza altezza? **[2]**

2. Vale $25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$. Qual è il più piccolo quadrato perfetto diverso da 25 che sia somma di cinque numeri interi consecutivi? **[2]**

3. In un poligono convesso di n lati, $n - 1$ angoli misurano 133°. Quanto può valere n? (Scrivere la somma dei valori possibili.) **[2]**

4. Due cerchi hanno raggi di lunghezza 1 e 7. Sapendo che una loro tangente interna comune è ortogonale ad una loro tangente esterna comune, calcolare la distanza tra i due centri. **[3]**

5. Andrea ha fatto un sacco di calcoli. Voleva sommare tutti i numeri di due cifre. Deve aver commesso un errore, visto che afferma che il risultato è un numero palindromo (cioè che non cambia leggendolo da sinistra a destra o da destra a sinistra). Forse ha saltato un numero. Quale? **[3]**

6. Indicata con $[x]$ la parte intera di x, cioè il più grande intero minore o uguale ad x, si consideri l'equazione $x\,[x] = n$. Qual è il più piccolo numero intero n di tre cifre tale che l'equazione non ha soluzioni reali? **[3]**

7. Nella successione crescente $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$, dove l'intero n appare n volte, qual è il 2004-esimo termine? **[3]**

8. Marco prende nota di un appuntamento con il dentista velocemente, scrivendo solo, ad esempio, 3/8 per indicare 3 agosto. Oppure 8 marzo? Non essendo sicuro sulla data ritelefona al dentista, il quale gli fa notare che invertendo i due numeri sarebbe andato con un ritardo di 60 giorni esatti. In che giorno ha l'appuntamento Marco? (Scrivete 38 per indicare 3 agosto.) **[3]**

9. Nell'espressione $23! = 2585A016738B84976640000$ che cifre hanno sostituito le lettere A e B? (Scrivete 12 se ritenete $A = 1$ e $B = 2$.) **[3]**

10. Qual è il più grande fattore primo di $6^6 + 9^6 + 6^6 + 4^6$? **[4]**

11. Se $f(x) = |3x - 1|$, quante soluzioni ha l'equazione $f(f(x)) = x$? **[4]**

12. La somma dei quadrati di tre numeri dispari consecutivi è un numero di quattro cifre, tutte uguali tra loro. Quanto vale la somma dei tre numeri dispari? **[4]**

13. Da un punto esterno a un cerchio si tracciano due secanti che formano un angolo di 10°. Le lunghezze dei due archi di cerchio compresi nell'angolo sono rispettivamente 3π e 5π. Quanto misura il raggio del cerchio? **[4]**

14. Quanto vale $x^5 - 4x^4 - 5x^2 - 4x + 1$ se $x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$? **[5]**

15. Per scrivere i numeri binari da 0 a 10 $(0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010)$ si scrive 17 volte "1". Quante volte si dovrà scrivere "1" per scrivere i numeri binari da 0 a 500? **[5]**

16. Calcolare la parte intera, cioè il più grande intero minore o uguale del numero stesso, di $(7 + 2\sqrt{11})^3$. **[5]**

17. Un quadrilatero ciclico ha i lati di lunghezza 14, 30, 30 e 50. Calcolare il raggio del cerchio circoscritto. **[6]**

18. Sia A l'insieme dei numeri

$$\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 25, 27, 28, 32, 33, 45, 47, 50, 51, 52, 53, 54\}.$$

Il prodotto di cinque numeri in A è 5754210. Quanto vale la loro somma? **[6]**

19. Sia $N = [a! + (a+1)! + (a+2)!][b! + (b+1)! + (b+2)!]$. Per quante coppie di numeri interi a, b, con $1 \leq a < b \leq 40$, N risulta un quadrato perfetto? **[9]**

20. Un esagono convesso è inscritto in un cerchio di raggio R. Le lunghezze dei suoi lati sono rispettivamente $4, 4, 4, 7, 7, 7$. Quanto vale R? **[9]**

PAVIA – 25 settembre 2004 (Regolamento gara a squadre)

1. Ogni squadra ha un **capitano** e un **consegnatore**. Il capitano è l'**unico** che può chiedere chiarimenti sul testo e può contestare una decisione della commissione. Il consegnatore è l'**unico** che può consegnare le risposte alla commissione.

2. La durata della gara è 2 ore. All'inizio della prova verranno proposti alcuni problemi **dimostrativi** e, solo dopo mezz'ora, alcuni problemi **a risposta numerica**.

3. Ogni squadra può consegnare un'unica soluzione di ciascun problema dimostrativo, che la commissione valuterà con un punteggio da 0 a 7. Per ciascun quesito, la prima squadra che totalizza almeno 4 punti riceve altri 2 punti di bonus. I problemi dimostrativi possono essere consegnati in ogni momento della gara.

4. Per i problemi a risposta numerica è necessario consegnare solo il risultato in un foglio piegato. Se il risultato è sbagliato, la squadra viene penalizzata di 2 punti, ma può consegnare altre risposte di quell'esercizio. Se la risposta è esatta, la squadra riceve un punteggio uguale al numero indicato fra [ ] nel testo e 2 punti in più se è stata la prima a consegnare la risposta corretta. Nel foglio della soluzione deve comparire, **cerchiato**, il numero dell'esercizio. Se una squadra consegna una risposta errata dopo averne già consegnata una corretta per lo stesso esercizio, viene comunque penalizzata di 2 punti. Ovviamente non è possibile ricevere più volte il punteggio per un dato esercizio se si riconsegna una risposta corretta.

PAVIA – 25 settembre 2004 (Soluzioni gara a squadre)

N	*risposta*	Punti
1	$\frac{20}{3}$	**2**
2	100	**2**
3	26	**2**
4	10	**3**
5	21	**3**
6	110	**3**
7	63	**3**
8	97	**3**
9	28	**3**
10	61	**4**
11	4	**4**
12	129	**4**
13	18	**4**
14	-5	**5**
15	2222	**5**
16	2533	**5**
17	25	**6**
18	140	**6**
19	5	**9**
20	$\sqrt{31}$	**9**