

Stage di preparazione Olimpiadi

Gara a squadre

Perugia, 2008-02-02

Risolvi i seguenti problemi e consegna la risposta.

- Se la risposta è una frazione $\frac{a}{b}$ (con a, b primi tra loro e $b > 1$), indica come risposta l'intero $a + b$.
- Se la risposta è un numero della forma $a + b\sqrt{t}$, con $t = 2, 3, 5$, utilizza i seguenti valori approssimati: $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{5} = 2.236$, e indica solo la parte intera della risposta (cioè, se la risposta è un numero irrazionale x , scrivi il più grande numero intero n minore o uguale a x).
- Non è ammesso l'uso di computer, calcolatrici, cellulari, carte da gioco.

-
1. Qual è la probabilità che i 5 numeri estratti in una singola estrazione del lotto siano in ordine crescente? **10 punti**
 2. m e n sono due interi primi tra loro. Nel polinomio $(mx + n)^{2000}$, i coefficienti di x^2 e x^3 sono uguali. Quanto vale $m + n$? **10 punti**
 3. Qual è la somma di tutti i numeri di due cifre che sono multipli di ognuna delle loro cifre? **20 punti**
 4. Se $10^n = a \cdot b$, con a e b interi positivi, allora almeno uno tra a e b contiene la cifra 0. Qual è il più piccolo intero positivo n per cui questo è vero? **20 punti**
 5. Trovare il più piccolo intero positivo con 12 divisori pari (positivi) e 6 divisori dispari (positivi) **25 punti**
 6. x, y, z sono tre reali positivi tali che $xyz = 1$, $x + 1/z = 5$, $y + 1/x = 29$. Quanto vale $z + 1/y$? **30 punti**

7. Quanto vale $\frac{2}{\log_4(2000^6)} + \frac{3}{\log_5(2000^6)}$? **30 punti**
8. Un triangolo ABC ha l'angolo in A di 60° , e l'angolo in B di 45° . La bisettrice dell'angolo in A incontra BC in un punto T tale che $AT = 24$. Quanto vale l'area del triangolo? **40 punti**
9. La successione x_1, x_2, \dots, x_{100} è tale che, per ogni k tra 1 e 100, x_k è uguale alla somma degli altri 99 numeri meno k . Trova quanto vale x_{50} . **40 punti**
10. Due scatole contengono complessivamente 25 palline, alcune bianche e alcune nere. Se estraiamo una pallina a caso da ogni scatola, la probabilità che siano entrambe nere è $27/50$. Qual è la probabilità che siano entrambe bianche? **40 punti**
11. Quanti punti a coordinate intere stanno sull'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 2000^2$? **40 punti**
12. Un triangolo ha i lati di lunghezza 20, 21, 22. La parallela al suo lato più corto passante per l'incentro incontra gli altri due lati in due punti X e Y . Quanto misura il segmento XY ? **50 punti**
13. Un trapezio $ABCD$ ha AB parallelo a CD , e $CD = AB + 100\sqrt{29}$. Il segmento che congiunge i punti medi dei lati AD e BC taglia il trapezio in due parti delle quali una ha area $2/3$ dell'altra. Trova la lunghezza del segmento parallelo a CD che taglia il trapezio in due parti di area uguale. **50 punti**
14. Quante sono le coppie di interi positivi m e n con $n < m < 1000000$ tali che la loro media aritmetica sia uguale alla loro media geometrica più 2? **70 punti**
15. In quanti modi diversi possiamo disporre in una fila 19 palline bianche o nere, in modo che non ci siano mai due palline bianche consecutive né tre palline nere consecutive? **70 punti**