Significato della divisione esatta

La divisione esatta fra a e b è l'operazione che dati i numeri a e b (con a multiplo di b) permette di trovare un terzo numero c tale che $c \times b = a$.

Descrivendo in questo modo la divisione, si fa ricadere il suo significato su quello della moltiplicazione.

Passiamo in rassegna tre modi operativi che possono essere descritti ai bambini della scuola primaria per risolvere le divisioni:

- $15 : 5 = \dots$ si considerano 15 unità e le si raggruppa a 5 a 5. Si contano infine il numero di gruppi da 5 ottenuti: sono 3. Presi i 3 gruppi per 5 oggetti ciascuno, ottengo le 15 unità iniziali.

- $15 : \dots = 5$ si considerano 15 unità e si sa che otterremo 5 gruppi. Si deve quindi trovare il numero di elementi per ciascuno dei 5 gruppi.

- $5 \times \dots = 15$ significa addizionare in modo reiterato il 5 un po' di volte fino a raggiungere il 15. Si conta poi quante volte si è dovuto addizionare il 5.

Significato della divisione euclidea

La divisione euclidea fra a e b permette di trovare due numeri q e r (quoziente e resto) tali che il dividendo è uguale al prodotto del divisore per il quoziente addizionato al resto.

Nel caso il resto sia uguale a 0*, la divisione euclidea ricade nel caso specifico della divisione esatta.*

Anche in questo caso la definizione di *divisione euclidea* scarica il suo significato su quelli della moltiplicazione e della addizione.

Passiamo in rassegna alcuni modi operativi che possono essere descritti ai bambini della scuola primaria per risolvere le divisioni, anche con resto:

- si rappresentano gli oggetti dei quali si deve affettuare la divisione e poi li si racchiude in insiemi contenenti il numero di elementi indicati dal divisore...

- $16 : 5 = \dots$ significa togliere da 16 il 5 una prima volta, una seconda volta e una terza volta. Oltre a tre volte non posso proseguire nella sottrazione, quindi 3 sarà il quoziente e $16 - 5 - 5 - 5 = 1 = resto$

- $16 = 5 \times \dots + \dots$. Inizio a moltiplicare $5 \times 1 = 5$, $5 \times 2 = 10$, $5 \times 3 = 15$, $5 \times 4 = 20$. Il 4 non va bene come quoziente poichè supera il 16 ed essendo il resto un numero positivo, non riuscirei a rendere vera l'uguaglianza $16 = 5 \times \dots + \dots$.
  Si avrà quindi $16 = 5 \times 3 + 1$

Proprietà della divisione

1. La divisione non è sempre possibile su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. È necessario che il divisore sia diverso da zero. Perché?
2. Distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione (alla sottrazione)

$$\forall m, n, p \in \mathbb{N} \text{ con } n \neq 0 \quad : \quad (n+p) : m = n : m + p : m$$

$$\forall m, n, p \in \mathbb{N} \text{ con } n \neq 0 \quad : \quad (n-p) : m = n : m - p : m$$

Proprietà della divisione

3 Vale l'invariantiva: moltiplicando e dividendo ai due termini della divisione lo stesso numero non nullo, il quoziente resta invariato (e il resto risulta moltiplicato o diviso per quello stesso numero):

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \ \text{ con } \ b, c \neq 0 \quad : \quad a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \ \text{ con } \ b, c \neq 0 \quad : \quad a : b = (a : c) : (b : c)$$

4 Attenzione: L'espressione $a \cdot b : c$ richiede che le due operazioni siano svolte nell'ordine con cui sono scritte, perchè non c'è un'operazione prevalente sull'altra.

Tavola della divisione

$: \nearrow$	0	1	2	3	4	5	...
0	indet.	0	0	0	0	0	...
1	$\nexists$	1 r. 0	0 r. 1	0 r. 3	0 r. 4	0 r. 5	...
2	$\nexists$	2 r. 0	1 r. 0	0 r. 2	0 r. 2	0 r. 2	...
3	$\nexists$	3 r. 0	1 r. 1	1 r. 0	0 r. 3	0 r. 3	...
4	$\nexists$	4 r. 0	2 r. 0	1 r. 1	1 r. 0	0 r. 4	...
5	$\nexists$	5 r. 0	2 r. 1	1 r. 2	1 r. 1	1 r. 0	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Quali sono le osservazioni deducibili dalla tavola?

Algoritmo della divisione esatta

$$947 : 4 \overset{notaz.}{=} (9 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0) : 4 =$$

$$= [(8 + 1) \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0] : 4 \overset{distr. \times risp. +}{=}$$

$$= (8 \times 10^2 + 1 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0) : 4 =$$

$$= (8 \times 10^2 + 14 \times 10^1 + 7 \times 10^0) : 4 \overset{distr.\ del\ : risp. +}{=}$$

$$= 2 \times 10^2 + [(12 + 2) \times 10^1 + 7 \times 10^0] : 4 \overset{distr.\ del \times risp. +}{=}$$

$$= 2 \times 10^2 + (12 \times 10^1 + 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0) : 4 =$$

$$= 2 \times 10^2 + (12 \times 10^1 + 27 \times 10^0) : 4 \overset{distr.\ del\ : risp. +}{=}$$

$$= 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + (27 \times 10^0) : 4 =$$

$$= 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + [(24 + 3) \times 10^0] : 4 =$$

$$= 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + (24 \times 10^0 + 3 \times 10^0) : 4 =$$

$$= 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + (3 \times 10^0) : 4 \overset{notaz.}{=}$$

$$= 236(\mathit{resto}\ 3)$$

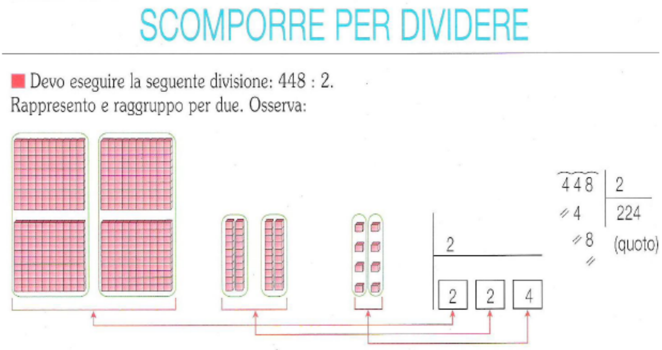
In sintesi:

$$
\begin{array}{lll}
9\ 4\ 7 & : & 4 = 2\ 3\ 6 \\
\underline{8} & & \\
1\ 4 & & \\
\underline{1\ 2} & & \\
\quad 2\ 7 & & \\
\quad \underline{2\ 4} & & \\
\qquad 3 & &
\end{array}
$$

Si noti la particolare grafica utilizzata per indicare il primo termine ('considero il primo termine') e i termini successivi 'da abbassare'.

Esempio

Mostriamo alcune schede della scuola primaria nelle quali si spiega l'algoritmo della divisione: vengono proposti l'aspetto grafico con i blocchi multibase, l'algoritmo della divisione tramite schema e la descrizione a parole di come si esegue l'algoritmo.



DIVISIONI, CAMBI E RESTO

Divisioni senza resto

1 Un parcheggio dispone di 285 posti divisi su 3 piani. Quanti posti sono disponibili su ogni piano?
Devi eseguire la seguente divisione 285 : 3.

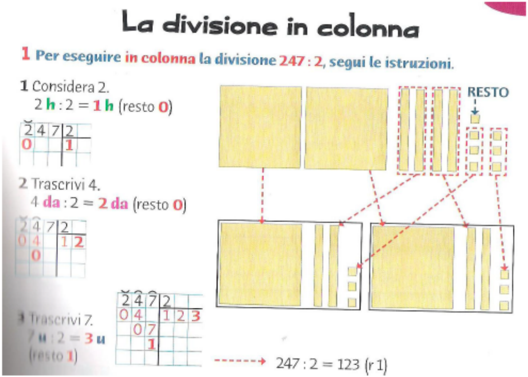
Esegui in colonna

h	da	u	
2	8	5	3
	1	...	95
		...	(quoto)

Il 3 nel 2 non ci sta, considero allora anche la seconda cifra del dividendo.
Il 3 nel 28 sta 9 volte con resto ...

Continua la divisione:

L'esempio che segue presenta una grafica più confusa rispetto ai precedenti:



- Le tecniche di calcolo (algoritmi) che descriviamo sono strettamente dipendenti sia dalle proprietà delle operazioni che dal sistema di numerazione che adottiamo.
- Gli esempi sono riferiti al sistema posizionale decimale, ma tali procedure si possono realizzare anche con basi diverse rispetto alla base 10.L'unico fatto rilevante ai fini dell'utilizzo di questi algoritmi è che il sistema sia posizionale .
- Il sistema posizionale costituisce un grande vantaggio per attuare il calcolo.

Osservazione

Spesso nel nostro sistema scolastico capita che si venga **istruiti all'uso di strumenti senza sapere a cosa servono e perchè vengono utilizzati**; in questo modo non si affina di certo la capacità riflessiva dello studente. Si pensi agli "algoritmi della sottrazione e divisione (i quali) vengono introdotti spesso senza far provare prima ai bambini la difficoltà di eseguire certe sottrazioni e divisioni procedendo in modo naturale[...]. In tutti questi casi il comportamento dell'insegnante è come quello di chi butta un salvagente ad una persona che sta facendo una scalata in montagna, perchè sa che fra poco questi andrà al mare e ne potrebbe avere bisogno: non c'è da stupirsi se chi è impegnato a scalare, soprattutto se è in difficoltà, butta via il salvagente." [1]

[1] Zan R., *Difficoltà in matematica*, Springer, p.211

Osservazione

Gli algoritmi consentono di semplificare e rendere meccaniche le procedure di calcolo, ma presuppongono molte acquisizioni concettuali: sistema di numerazione posizionale, proprietà delle operazioni,...
Per questo motivo le tecniche devono essere insegnate con gradualità, con l'uso del tempo necessario e con molta pazianza; non devono essere percepite da docente e alunno come unico obiettivo dell'insegnamento della matematica nella scuola primaria. Il linguaggio simbolico dell'aritmetica e i suoi meccanismi devono essere una conquista del bambino, cosí come lo sono stati per l'intera umanità.

La divisione canadese.