

# UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

## Prova scritta di Sistemi Dinamici

5 settembre 2025

1. Un sistema di equazioni differenziali è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(k - y) \\ \dot{y} = y(kx - 1). \end{cases}$$

Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità, anche asintotica, al variare di  $k \neq 0$ , distinguendo tra selle, nodi, fuochi e centri.

2. Si studi la stabilità degli equilibri del sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = x_h + \frac{\alpha x_h^2}{1 + x_h^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Si discuta la stabilità della posizione nulla del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin x \\ \dot{y} = -\alpha y(1 + z) \\ \dot{z} = \alpha y^2 - z^3 \end{cases}$$

al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

4. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = x(|\mu| - x^2)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro  $\mu \in \mathbb{R}$  e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

Nel caso  $\mu = 0$  si trovi la soluzione esplicita del problema con condizione iniziale  $x(0) = 1$ .