

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Prova scritta di Sistemi Dinamici

8 giugno 2026

1. Un sistema lineare di equazioni differenziali è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - y \\ \dot{y} = kx + y. \end{cases}$$

Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità, anche asintotica, al variare di $k \in \mathbb{R}$, distinguendo tra selle, nodi, fuochi e centri.

2. Dato il sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \alpha \sin x_h, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

se ne studi la stabilità della soluzione nulla.

Nel caso $\alpha = \pi/2$ si mostri che esiste almeno un'altra posizione di equilibrio e se ne studi la stabilità.

3. Si discuta la stabilità della posizione nulla del sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - ky^3 \\ \dot{y} = x^3 - y^5 \end{cases}$$

al variare di $k > 0$.

Che cosa si può dire se $k = 0$?

4. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = \mu x + x^2 - x^3$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

5. Si discuta la stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_{h+1} = y_h - a \\ y_{h+1} = a - x_h^2 \end{cases}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Il sistema ammette 2-cicli?