Rompicapi matematici e tessere che scorrono: ragioniamoci!

L'intramontabile gioco del 15

Maurizio Paolini (paolini@dmf.unicatt.it)

Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia"
Università Cattolica, Brescia

San Felice del Benaco, 2 febbraio 2016

Due parole sul film “The cube”

Che c’entra il film “The cube” con questa conferenza?

Due parole sul film "The cube"

Che c'entra il film "The cube" con questa conferenza?

NIENTE

Due parole sul film “The cube”

Che c’entra il film “The cube” con questa conferenza?

NIENTE

Per la verità ci sono questi cubi che si spostano (nel film), che richiamano lo spostamento delle tessere del rompicapo (2D invece che 3D).

Due parole sul film “The cube”

Che c’entra il film “The cube” con questa conferenza?

NIENTE

Per la verità ci sono questi cubi che si spostano (nel film), che richiamano lo spostamento delle tessere del rompicapo (2D invece che 3D).
Comunque: ci sono questioni matematiche evidenti nel film (i numeri con cui sono etichettate le stanze), e non mancano delle evidenti sciocchezze. Essenzialmente tutte legate ad un cattivo doppiaggio:

Due parole sul film "The cube"

Che c'entra il film "The cube" con questa conferenza?

NIENTE

Per la verità ci sono questi cubi che si spostano (nel film), che richiamano lo spostamento delle tessere del rompicapo (2D invece che 3D).
Comunque: ci sono questioni matematiche evidenti nel film (i numeri con cui sono etichettate le stanze), e non mancano delle evidenti sciocchezze. Essenzialmente tutte legate ad un cattivo doppiaggio:

- La struttura sarebbe di 132mq (quindi il lato di tutto sarebbe di circa 11 metri e mezzo). Ma in inglese è detto giusto: "434 feet squared".

Due parole sul film "The cube"

Che c'entra il film "The cube" con questa conferenza?

NIENTE

Per la verità ci sono questi cubi che si spostano (nel film), che richiamano lo spostamento delle tessere del rompicapo (2D invece che 3D).
Comunque: ci sono questioni matematiche evidenti nel film (i numeri con cui sono etichettate le stanze), e non mancano delle evidenti sciocchezze. Essenzialmente tutte legate ad un cattivo doppiaggio:

- La struttura sarebbe di 132*mq* (quindi il lato di tutto sarebbe di circa 11 metri e mezzo). Ma in inglese è detto giusto: "434 feet squared".
- Quando si parla di "fattoriale" è evidente che ci si riferisce a qualcos'altro.

Fattoriale?!?

`What did you say?`

`Astronomical.`

`Before that.`

`Factors.`

`How many factors Kazan?  Of 567.`

`2.`

`What, are you kidding?`

Riferimenti:

Da wikipedia:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Cube_(film)`

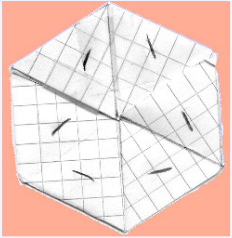
"The fictional Cube device in the film was conceived by David W. Pravica, a mathematician..."

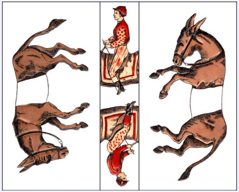
Riferimenti:

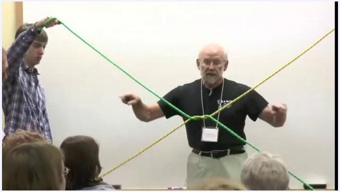
Da wikipedia:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Cube_(film)`
"The fictional Cube device in the film was conceived by David W. Pravica, a mathematician..."

È comunque vero che guardando il film non si riesce a ricostruire tutte le caratteristiche matematiche pensate da Pravica.

Rompicapi per tutti i gusti





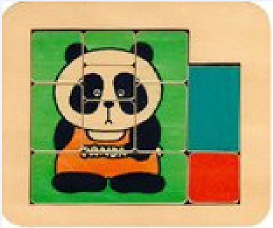


Un po' di storia...

Da wikipedia:

"Il gioco del quindici è un rompicapo classico creato nel 1874 dal postino di Canastota (New York) Noyes Palmer Chapman e popolarizzato nel 1880 da Samuel Loyd". [`https://it.wikipedia.org/wiki/Gioco_del_quindici`]

Varianti:



Lo conosciamo: 15 tessere scorrevoli da mescolare e poi riportare nella configurazione di partenza.

Una strana variante

Leonardo acquista una curiosa variante con i numeri della successione di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610. La sostanza non cambia... Comunque Leonardo lo mescola un po' [video 1]

Leonardo acquista una curiosa variante con i numeri della successione di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610. La sostanza non cambia... Comunque Leonardo lo mescola un po' [video 1]

Una strana variante

Leonardo acquista una curiosa variante con i numeri della successione di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610. La sostanza non cambia... Comunque Leonardo lo mescola un po' [video 1]

Poi cerca di riordinare le tessere [video 2], ma...

Una strana variante

Leonardo acquista una curiosa variante con i numeri della successione di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610. La sostanza non cambia... Comunque Leonardo lo mescola un po' [video 1]

Poi cerca di riordinare le tessere [video 2], ma... non riesce a sistemarle tutte, si ritrova ad esempio con la 144 e la 610 scambiate.

Una strana variante (2)

Ecco alcune configurazioni che riesce ad ottenere:

Le tessere 144 e 610 sono scambiate

Una strana variante (2)

Ecco alcune configurazioni che riesce ad ottenere:

Le tessere 89 e 144 sono scambiate

Una strana variante (2)

Ecco alcune configurazioni che riesce ad ottenere:

Le tessere 89 e 610 sono scambiate

Ecco alcune configurazioni che riesce ad ottenere:

Le tessere 377 e 610 sono scambiate

Una strana variante (2)

Ecco alcune configurazioni che riesce ad ottenere:

$233 \leftrightarrow 377$

Ecco alcune configurazioni che riesce ad ottenere:

Ragionamenti...

In quasi tutti i casi Leonardo si trova con uno **scambio** di due tessere da fare...
In un caso ci sono quattro scambi... ma se insistiamo nell'avere la casella vuota in basso a destra, gli scambi diventano tre...

Ragionamenti...

In quasi tutti i casi Leonardo si trova con uno **scambio** di due tessere da fare...

In un caso ci sono quattro scambi... ma se insistiamo nell'avere la casella vuota in basso a destra, gli scambi diventano tre...

Congettura

Il gioco del 15 mi permette di fare solo un numero pari di scambi

Ragionamenti...

In quasi tutti i casi Leonardo si trova con uno **scambio** di due tessere da fare...
In un caso ci sono quattro scambi... ma se insistiamo nell'avere la casella vuota in basso a destra, gli scambi diventano tre...

Congettura

Il gioco del 15 mi permette di fare solo un numero pari di scambi

Aha!!! — Leonardo ha capito come risolvere il rompicapo!
[video 3]

Ragionamenti...

In quasi tutti i casi Leonardo si trova con uno **scambio** di due tessere da fare...
In un caso ci sono quattro scambi... ma se insistiamo nell'avere la casella vuota in basso a destra, gli scambi diventano tre...

Congettura

Il gioco del 15 mi permette di fare solo un numero pari di scambi

Aha!!! — Leonardo ha capito come risolvere il rompicapo!
[video 3]

Scambia tra loro sia le due tessere fuori posto che le due tessere indistinguibili in altro a sinistra!

Senza regole

Smontando il rompicapo possiamo ottenere configurazioni impossibili:

Smontando il rompicapo possiamo ottenere configurazioni impossibili:

cacciavite
$\Longrightarrow$

drizziamo
$\Longrightarrow$

Senza regole

Smontando il rompicapo possiamo ottenere configurazioni impossibili:

Una configurazione è un "rimescolamento" delle tessere se consideriamo la casella vuota come una particolare tessera: la tessera "16"

Senza regole

Smontando il rompicapo possiamo ottenere configurazioni impossibili:

cacciavite $\Longrightarrow$

drizziamo $\Longrightarrow$

Una configurazione è un "rimescolamento" delle tessere se consideriamo la casella vuota come una particolare tessera: la tessera "16"

Problema

Quali configurazioni sono raggiungibili (senza usare il cacciavite)?

Senza regole

Smontando il rompicapo possiamo ottenere configurazioni impossibili:

cacciavite $\Longrightarrow$

drizziamo $\Longrightarrow$

Una configurazione è un "rimescolamento" delle tessere se consideriamo la casella vuota come una particolare tessera: la tessera "16"

Problema

Quali configurazioni sono raggiungibili (senza usare il cacciavite)?

La parte interessante è **escludere** configurazioni sicuramente **non raggiungibili** costruendo opportuni invarianti.

Due ingredienti

Per costruire il nostro invariante (un numero associato ad una configurazione) abbiamo bisogno di due ingredienti:

- Le **permutazioni**: $\mathcal{P} = \pm 1$
- Caselle bianche e caselle nere: $\mathcal{S} = \pm 1$

Due ingredienti

Per costruire il nostro invariante (un numero associato ad una configurazione) abbiamo bisogno di due ingredienti:

- Le **permutazioni**: $\mathcal{P} = \pm 1$
- Caselle bianche e caselle nere: $\mathcal{S} = \pm 1$

Il nostro invariante sarà il prodotto:

$$\mathcal{I} = \mathcal{P}\mathcal{S}$$

Due ingredienti

Per costruire il nostro invariante (un numero associato ad una configurazione) abbiamo bisogno di due ingredienti:

- Le **permutazioni**: $\mathcal{P} = \pm 1$
- Caselle bianche e caselle nere: $\mathcal{S} = \pm 1$

Il nostro invariante sarà il prodotto:

$$\mathcal{I} = \mathcal{P}\mathcal{S}$$

Teorema

Il valore di $\mathcal{I}$ non cambia quando si effettua una mossa

Conseguenza: una configurazione con $\mathcal{I}$ diverso da quello della configurazione di partenza non è raggiungibile

Permutazioni...

permutare = mescolare oggetti (ad esempio le 52 carte di un mazzo francese)

Permutazioni...

permutare = mescolare oggetti (ad esempio le 52 carte di un mazzo francese)

... oppure le lettere di una parola (senza lettere ripetute): gli anagrammi di `"TRE"` sono: `"TRE"`, `"TER"`, `"RTE"`, `"RET"`, `"ETR"`, `"ERT"` (notate che ce sono 6). Quanti sono gli anagrammi di `"SEI"`?

Permutazioni...

permutare = mescolare oggetti (ad esempio le 52 carte di un mazzo francese)

... oppure le lettere di una parola (senza lettere ripetute): gli anagrammi di `"TRE"` sono: `"TRE"`, `"TER"`, `"RTE"`, `"RET"`, `"ETR"`, `"ERT"` (notate che ce sono 6). Quanti sono gli anagrammi di `"SEI"`?

Quante sono le permutazioni di n oggetti?

permutare = mescolare oggetti (ad esempio le 52 carte di un mazzo francese)

... oppure le lettere di una parola (senza lettere ripetute): gli anagrammi di "TRE" sono: "TRE", "TER", "RTE", "RET", "ETR", "ERT" (notate che ce sono 6). Quanti sono gli anagrammi di "SEI"?

Quante sono le permutazioni di n oggetti?

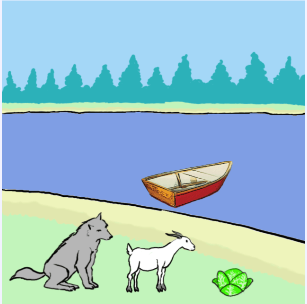
$$N = n! \qquad \text{(leggi: ``enne fattoriale'')}$$

Ad esempio ci sono

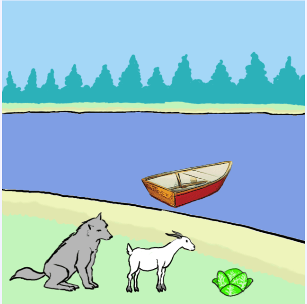
$$52! = 52 \cdot 51 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 806581_{75170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000}$$

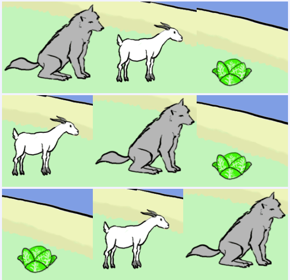
diversi mazzi "mescolati".

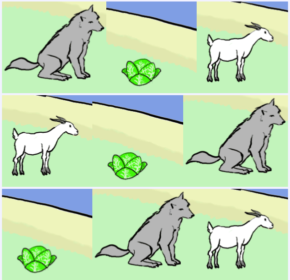
n=3: Capra e cavoli



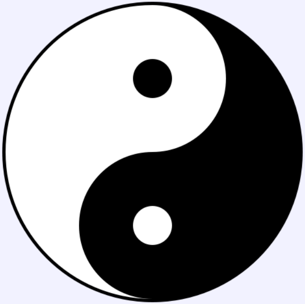
n=3: Capra e cavoli



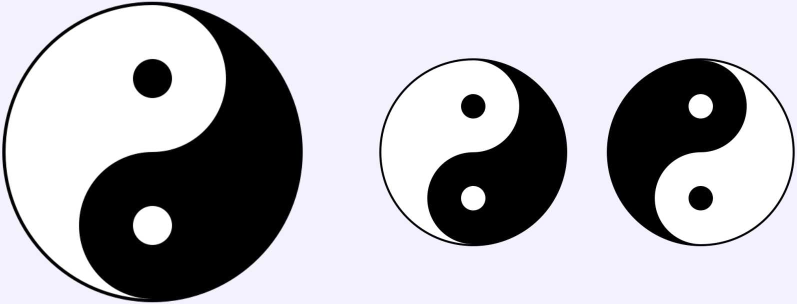




n=2: Yin e Yang



n=2: Yin e Yang



n=1: Il nostro mondo

n=1: Il nostro mondo

n=0: L'insieme vuoto

$$\emptyset = \{\}$$

n=0: L'insieme vuoto

$$\varnothing = \{\} \qquad\qquad \varnothing$$

La parola vuota: "" è (l'unico) anagramma della parola vuota. In effetti $0! = 1$!

Notazione in cicli disgiunti

I numeri da 1 a n indicano la posizione di ciascun oggetto.
La scrittura

$$(1\ 2)$$

indica lo scambio dei primi due oggetti: l'oggetto in posizione 1 si scambia con l'oggetto in posizione 2

Notazione in cicli disgiunti

I numeri da 1 a n indicano la posizione di ciascun oggetto.
La scrittura

$$(1\ 2)$$

indica lo scambio dei primi due oggetti: l'oggetto in posizione 1 si scambia con l'oggetto in posizione 2
La scrittura

$$(3\ 4\ 5)$$

indica una permutazione ciclica dei tre oggetti in posizione 3, 4, 5, ovvero: l'oggetto in posizione 3 va nella posizione 4, quello in posizione 4 nella posizione 5 e infine quello nella posizione 5 va nella posizione 3.

Notazione in cicli disgiunti

I numeri da 1 a n indicano la posizione di ciascun oggetto.
La scrittura

$$(1\ 2)$$

indica lo scambio dei primi due oggetti: l'oggetto in posizione 1 si scambia con l'oggetto in posizione 2
La scrittura

$$(3\ 4\ 5)$$

indica una permutazione ciclica dei tre oggetti in posizione 3, 4, 5, ovvero: l'oggetto in posizione 3 va nella posizione 4, quello in posizione 4 nella posizione 5 e infine quello nella posizione 5 va nella posizione 3.
Si possono combinare le notazioni, ad esempio $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$ trasforma

$$\texttt{ALBERO} \rightarrow \texttt{BRALEO}$$

Notazione in cicli disgiunti

I numeri da 1 a n indicano la posizione di ciascun oggetto.
La scrittura

$$(1\ 2)$$

indica lo scambio dei primi due oggetti: l'oggetto in posizione 1 si scambia con l'oggetto in posizione 2
La scrittura

$$(3\ 4\ 5)$$

indica una permutazione ciclica dei tre oggetti in posizione 3, 4, 5, ovvero: l'oggetto in posizione 3 va nella posizione 4, quello in posizione 4 nella posizione 5 e infine quello nella posizione 5 va nella posizione 3.
Si possono combinare le notazioni, ad esempio $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$ trasforma

$$\mathtt{ALBERO} \to \mathtt{BRALEO} \to \mathtt{AEBRLO} \to \mathtt{BLAERO} \to \dots$$

Operazioni sulle permutazioni

Se σ e τ sono due permutazioni, il loro prodotto $\sigma\tau$ vuol dire fare prima σ e poi τ (si ottiene una nuova permutazione).

Operazioni sulle permutazioni

Se σ e τ sono due permutazioni, il loro prodotto $\sigma\tau$ vuol dire fare prima σ e poi τ (si ottiene una nuova permutazione).
Il "contrario" di una permutazione è la permutazione inversa σ^{-1}

Operazioni sulle permutazioni

Se σ e τ sono due permutazioni, il loro prodotto $\sigma\tau$ vuol dire fare prima σ e poi τ (si ottiene una nuova permutazione).
Il "contrario" di una permutazione è la permutazione inversa σ^{-1}

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e = ()$$

dove e o $()$ è la permutazione "banale" che lascia tutto invariato (permutazione identica)

Proprietà della moltiplicazione di permutazioni

La moltiplicazione di permutazioni è associativa ma **non è** commutativa: in generale $\sigma\tau \neq \tau\sigma$

Pari e dispari

Punto chiave:

Le permutazioni si dividono in “pari” e “dispari”

Pari e dispari

Punto chiave:

Le permutazioni si dividono in “pari” e “dispari”

Esattamente la metà delle permutazioni è pari e l’altra metà è dispari

regole

- pari per pari è pari
- dispari per dispari è pari
- pari per dispari è dispari
- dispari per pari è dispari

Pari e dispari

Punto chiave:

Le permutazioni si dividono in “pari” e “dispari”

Esattamente la metà delle permutazioni è pari e l’altra metà è dispari

regole

- pari per pari è pari
- dispari per dispari è pari
- pari per dispari è dispari
- dispari per pari è dispari

In particolare:

- $e = ()$ è pari
- Uno scambio (ab) è dispari
- Un ciclo di tre (abc) è pari; $(abcd)$ è dispari; ...

Primo ingrediente

Ora consideriamo le 15 tessere più la casella vuota (tessera 16) di una certa configurazione; la loro posizione corrisponde ad una permutazione della configurazione iniziale.
Diremo allora che il valore di $\mathcal{P}$ per tale configurazione è

$$\mathcal{P} = \begin{cases} 1 & \text{se la permutazione è pari,} \\ -1 & \text{se la permutazione è dispari.} \end{cases}$$

Primo ingrediente

Ora consideriamo le 15 tessere più la casella vuota (tessera 16) di una certa configurazione; la loro posizione corrisponde ad una permutazione della configurazione iniziale.
Diremo allora che il valore di $\mathcal{P}$ per tale configurazione è

$$\mathcal{P} = \begin{cases} 1 & \text{se la permutazione è pari,} \\ -1 & \text{se la permutazione è dispari.} \end{cases}$$

Osserviamo che:

Data una configurazione, una mossa del rompicapo è uno scambio tra la casella 16 ed una sua casella adiacente. Uno scambio è una permutazione dispari e il prodotto per una permutazione dispari cambia la parità. Quindi:

$$\mathcal{P}_{\text{nuova}} = -\mathcal{P}_{\text{vecchia}}$$

Un vecchio gioco di avventura

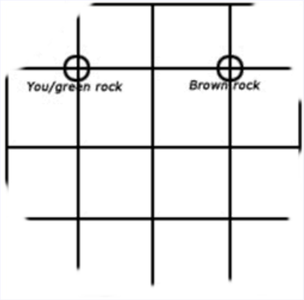
Estratto dall' "adventure game testuale" **Spellbreaker** di INFOCOM:

```
Plain
This is a flat plain punctuated by boulders. The boulders
are all identical and slide to and fro on the eerie
surface, propelled by an unknown mechanism. The ground is
scratched by many intersecting lines which seem to have a
regular pattern. From where you are standing you can see
lines radiating north, east, west and south. There is a
large green eyed rock here. Also, there is a large brown
eyed rock with a featureless white cube on its back some
distance to the east. Far in the distance are mountains
which quiver itchily as they belch forth purple fire.
```

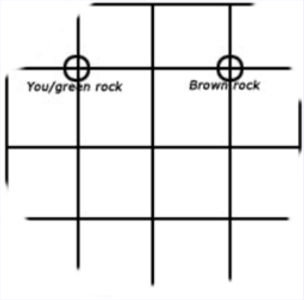
Traduzione:

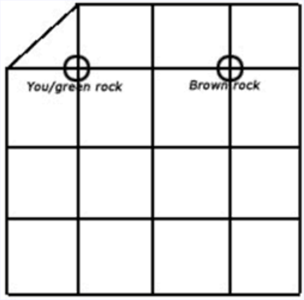
Pianura
Si tratta di una pianura punteggata da massi. I massi sono tutti uguali e scorrono avanti e indietro sulla superficie misteriosa, azionati da un meccanismo sconosciuto. Il terreno è graffiato da numerose linee che si intersecano e che sembrano avere uno schema regolare. Da dove stai è possibile vedere linee che si irradiano verso nord, est, ovest e sud. Qui C'è una roccia dagli occhi verdi. Inoltre, ad una certa distanza verso est c'è una grossa roccia dagli occhi marroni con un anonimo cubo bianco sul dorso. In lontananza ci sono montagne che rabbrividiscono di prurito mentre eruttano fuoco viola.

```
[...]
>climb rock
You climb the rock and perch precariously on top. From
here you can see that the long scratches in the ground
form a rectangular grid that fills a rather small valley.
"My back is the most hemispheric of all my friends’,"
remarks the rock.
```



```
[...]
>climb rock
You climb the rock and perch precariously on top. From
here you can see that the long scratches in the ground
form a rectangular grid that fills a rather small valley.
"My back is the most hemispheric of all my friends’,"
remarks the rock.
```





Coloriamo di bianco e di nero

(Idealmente) togliamo le tessere e coloriamo le caselle come una scacchiera:

$\Longrightarrow$

(Idealmente) togliamo le tessere e coloriamo le caselle come una scacchiera:

Dopo una mossa la posizione vuota (tessera 16) si sposta orizzontalmente o verticalmente di una posizione, e la casella su cui si trova cambierà colore.

Secondo ingrediente

Ora possiamo definire il secondo ingrediente:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 1 & \text{se la casella della tessera 16 è bianca,} \\ -1 & \text{se la casella della tessera 16 è nera.} \end{cases}$$

Secondo ingrediente

Ora possiamo definire il secondo ingrediente:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 1 & \text{se la casella della tessera 16 è bianca,} \\ -1 & \text{se la casella della tessera 16 è nera.} \end{cases}$$

Osserviamo che:

Data una configurazione, una mossa del rompicapo sposta la tessera 16 da una casella ad una adiacente. Quindi:

$$\mathcal{S}_{\text{nuova}} = -\mathcal{S}_{\text{vecchia}}$$

Conclusione

Ricordiamo che l'invariante è stato definito come $\mathcal{I} = \mathcal{P}\mathcal{S}$, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{nuova}} &= \mathcal{P}_{\text{nuova}}\mathcal{S}_{\text{nuova}} = (-\mathcal{P}_{\text{vecchia}})(-\mathcal{S}_{\text{vecchia}}) \\ &= \mathcal{P}_{\text{vecchia}}\mathcal{S}_{\text{vecchia}} = \mathcal{I}_{\text{vecchia}} \end{aligned}$$

Conclusione

Ricordiamo che l'invariante è stato definito come $\mathcal{I} = \mathcal{P}\mathcal{S}$, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{nuova}} &= \mathcal{P}_{\text{nuova}}\mathcal{S}_{\text{nuova}} = (-\mathcal{P}_{\text{vecchia}})(-\mathcal{S}_{\text{vecchia}}) \\ &= \mathcal{P}_{\text{vecchia}}\mathcal{S}_{\text{vecchia}} = \mathcal{I}_{\text{vecchia}} \end{aligned}$$

La configurazione iniziale ha le tessere perfettamente ordinate: permutazione "identica", quindi $\mathcal{P} = 1$; la casella vuota (tessera 16, in basso a destra) è bianca, quindi $\mathcal{S} = 1$. In definitiva $\mathcal{I} = \mathcal{P}\mathcal{S} = 1$

Conclusione

Ricordiamo che l'invariante è stato definito come $\mathcal{I} = \mathcal{P}\mathcal{S}$, quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\text{nuova}} =& \mathcal{P}_{\text{nuova}}\mathcal{S}_{\text{nuova}} = (-\mathcal{P}_{\text{vecchia}})(-\mathcal{S}_{\text{vecchia}}) \\ =& \mathcal{P}_{\text{vecchia}}\mathcal{S}_{\text{vecchia}} = \mathcal{I}_{\text{vecchia}}\end{aligned}$$

La configurazione iniziale ha le tessere perfettamente ordinate: permutazione "identica", quindi $\mathcal{P} = 1$; la casella vuota (tessera 16, in basso a destra) è bianca, quindi $\mathcal{S} = 1$. In definitiva
$\mathcal{I} = \mathcal{P}\mathcal{S} = 1$
Abbiamo dimostrato il

Teorema

Non è possibile risolvere il rompicapo se la configurazione ha un invariante $\mathcal{I} = -1$

Esempio

Mescoliamo le tessere a caso (usando il cacciavite!):

$\Longrightarrow$

Esempio

Mescoliamo le tessere a caso (usando il cacciavite!):

$\Longrightarrow$

La permutazione delle 16 tessere è la seguente:

$$(1\ 7\ 14\ 12)(2\ 10)(3\ 13\ 5)(4\ 6\ 8\ 9)(11\ 15\ 16) = ddpdp$$

che è dispari, quindi $\mathcal{P} = -1$; la casella vuota è bianca, quindi $\mathcal{S} = 1$ e in definitiva $\mathcal{I} = -1$.

Esempio

Mescoliamo le tessere a caso (usando il cacciavite!):

$\Longrightarrow$

La permutazione delle 16 tessere è la seguente:

$$(1\ 7\ 14\ 12)(2\ 10)(3\ 13\ 5)(4\ 6\ 8\ 9)(11\ 15\ 16) = ddpdp$$

che è dispari, quindi $\mathcal{P} = -1$; la casella vuota è bianca, quindi $\mathcal{S} = 1$ e in definitiva $\mathcal{I} = -1$.
Conclusione: tale configurazione è irraggiungibile, o in altre parole non è possibile risolvere il rompicapo partendo da qui.

E per finire la parte noiosa...

Abbiamo finito?

E per finire la parte noiosa...

Abbiamo finito? Ovviamente no. Abbiamo **escluso** delle configurazioni, ma cosa possiamo dire di quelle che rimangono? Se **congetturiamo** che tutte le rimanenti (quelle con $\mathcal{I} = 1$) siano raggiungibili dovremmo dimostrarlo, ad esempio trovando un **algoritmo** per raggiungerle effettivamente.

E per finire la parte noiosa...

Abbiamo finito? Ovviamente no. Abbiamo **escluso** delle configurazioni, ma cosa possiamo dire di quelle che rimangono?
Se **congetturiamo** che tutte le rimanenti (quelle con $\mathcal{I} = 1$) siano raggiungibili dovremmo dimostrarlo, ad esempio trovando un **algoritmo** per raggiungerle effettivamente.
Questo si sa fare, ma non è molto interessante (per un matematico, almeno). Ad esempio si potrebbe procedere così:

- Sistemo le prime due righe. L'unica difficoltà qui è sistemare l'ultima tessera di una riga;
- Sistemo le tessere 9 e 13 (nella colonna più a sinistra);
- Sistemo le tessere 10 e 14 (seconda colonna);
- Ruoto le ultime tre tessere finché non vanno a posto.

GRAZIE!