UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Primo appello - 17/01/2019

1

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.
  Risposta $S = \left\{\left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4k+7}{3}\right)\right\}$ se $k \neq 1$; $S = \left\{\left(4+4a, a, -\frac{1+5a}{2}\right) : a \in \mathbb{R}\right\}$ se $k = 1$. ________ **(pt.3A)**

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (2, 2, 1)$ è un autovettore di A_k.
  Risposta $k = -8$. ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

- determinare il polinomio caratteristico di A; **Risposta** $p_A(t) = (t-1)^2(t-3)^2$. ________ **(pt.2A)**

- determinare gli autovalori di A; **Risposta** $\lambda = 1, 3$ ________ **(pt.1A)**

- dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta, e in tal caso scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. **Risposta** A è diagonalizzabile, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Siano $U = \{(a+2b+c, b+c, c-a, 2a+b-c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(8a+b, 3a+b, b-2a, 7a+2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Si determini:

- una base di $U + W$; **Risposta** $\mathcal{B} = ((1, 0, -1, 2), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 2))$. ________ **(pt.2A)**

- un complemento diretto di U; **Risposta** $\{(0, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. ________ **(pt.2A)**

- la dimensione di un complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\dim(W^\perp) = 2$. ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 4. Date le rette r: $x + y - z + 1 = 2x + y - 3z - 2 = 0$ e s: $x - y - z - 1 = 2y + 3z - 4 = 0$ di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$,

- determinare un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r e s;
  Risposta $25x + 5y - 37 = 7x + z - 15 = 0$. ________ **(pt.3G)**

- determinare un'equazione cartesiana di due piani paralleli α e β tali che $r \subseteq \alpha$ e $s \subseteq \beta$.
  Risposta $\alpha : x - 5y - 7z - 23 = 0$; $\beta : x - 5y - 7z + 7 = 0$. ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la conica $\mathcal{C}_k$: $x^2 + 2kxy + y^2 - 3x - 3y + 9 = 0$. Si determini:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è l'unione di due rette reali distinte. **Risposta** Mai. ________ **(pt.2G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. **Risposta** $k = -1$. ________ **(pt.2G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (1, 1)$ e $Q = (2, 0)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = -\frac{5}{2}$. ________ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la quadrica $\mathcal{Q}$: $x^2 - 2xz + 2x + y^2 + 4yz + 2y + 4z + 1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, determinandone anche la natura dei punti semplici.
  Risposta Iperboloide iperbolico. ________ **(pt.3G)**

- Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano α: $4x - 3y + z - 2 = 0$.
  Risposta Unione di due rette reali e distinte. ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Primo appello - 17/01/2019

2

COGNOME	NOME
Ingegneria gestionale	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.
  Risposta $S = \left\{\left(-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4k+7}{3}\right)\right\}$ se $k \neq 1$; $S = \left\{\left(a, 4+4a, -\frac{1+5a}{2}\right) : a \in \mathbb{R}\right\}$ se $k = 1$. **(pt.3A)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (2,2,1)$ è un autovettore di A_k.
  Risposta $k = -8$. **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

- determinare il polinomio caratteristico di A; **Risposta** $p_A(t) = (t-1)^2(t+3)^2$. **(pt.2A)**
- determinare gli autovalori di A; **Risposta** $\lambda = 1, -3$ **(pt.1A)**
- dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta, e in tal caso scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. **Risposta** A è diagonalizzabile, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Siano $U = \{(a+2b-2c, b-2c, -a-2c, 2a+b+2c) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(8a-b, 3a-b, b-2a, 7a-2b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Si determini:

- una base di $U+W$; **Risposta** $\mathcal{B} = ((1,0,-1,2),(2,1,0,1),(1,1,-1,2))$. **(pt.2A)**
- un complemento diretto di U; **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. **(pt.2A)**
- la dimensione di un complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\dim(W^\perp) = 2$. **(pt.1A)**

ESERCIZIO 4. Date le rette r: $x+y-z+3 = 2x+y-3z+2 = 0$ e s: $x-y-z+1 = 2y+3z-4 = 0$ di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$,

- determinare un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r e s;
  Risposta $25x+5y+13 = 7x+z-1 = 0$. **(pt.3G)**
- determinare un'equazione cartesiana di due piani paralleli α e β tali che $r \subseteq \alpha$ e $s \subseteq \beta$.
  Risposta $\alpha : x-5y-7z-21 = 0$; $\beta : x-5y-7z+9 = 0$. **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la conica $\mathcal{C}_k$: $4x^2+4kxy+y^2-6x-3y+9 = 0$. Si determini:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è l'unione di due rette reali distinte. **Risposta** Mai. **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. **Risposta** $k = -1$. **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (-1,1)$ e $Q = (2,0)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = \frac{7}{8}$. **(pt.1G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la quadrica $\mathcal{Q}$: $x^2-2xz+2x+y^2+4yz-4y+4z+1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, determinandone anche la natura dei punti semplici.
  Risposta Iperboloide ellittico. **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano α: $4x-6y+z-2 = 0$.
  Risposta Unione di due rette immaginarie e coniugate. **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Algebra e Geometria - Primo appello - 17/01/2019

3

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.
  Risposta $S = \left\{ \left(-\frac{5}{3}, \frac{4k+7}{3}, -\frac{8}{3}\right) \right\}$ se $k \neq 1$; $S = \left\{ \left(a, -\frac{1+5a}{2}, 4+4a\right) : a \in \mathbb{R} \right\}$ se $k = 1$. **(pt.3A)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (1, -5, -1)$ è un autovettore di A_k.
  Risposta $k = -14$. **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,

- determinare il polinomio caratteristico di A; **Risposta** $p_A(t) = (t+1)^2(t-3)^2$. **(pt.2A)**
- determinare gli autovalori di A; **Risposta** $\lambda = -1, 3$ **(pt.1A)**
- dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta, e in tal caso scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. **Risposta** A è diagonalizzabile, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Siano $U = \{(2a+2b-c, b-c, -2a-c, 4a+b+c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(8a+b, 3a+b, -b-2a, 7a+2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Si determini:

- una base di $U + W$; **Risposta** $\mathcal{B} = ((1, 0, -1, 2), (2, 1, 0, 1), (1, 1, -1, 2))$. **(pt.2A)**
- un complemento diretto di U; **Risposta** $\{(0, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. **(pt.2A)**
- la dimensione di un complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\dim(W^\perp) = 2$. **(pt.1A)**

ESERCIZIO 4. Date le rette r: $x + y - z - 1 = 2x + y - 3z - 6 = 0$ e s: $x - y - z - 3 = 2y + 3z - 4 = 0$ di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$,

- determinare un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r e s;
  Risposta $25x + 5y - 87 = 7x + z - 29 = 0$. **(pt.3G)**
- determinare un'equazione cartesiana di due piani paralleli α e β tali che $r \subseteq \alpha$ e $s \subseteq \beta$.
  Risposta $\alpha : x - 5y - 7z - 25 = 0$; $\beta : x - 5y - 7z + 5 = 0$. **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la conica $\mathcal{C}_k$: $4x^2 - 4kxy + y^2 - 6x - 3y + 9 = 0$. Si determini:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è l'unione di due rette reali distinte. **Risposta** Mai. **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. **Risposta** $k = 1$. **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (-1, 1)$ e $Q = (2, 0)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = -\frac{7}{8}$. **(pt.1G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la quadrica $\mathcal{Q}$: $x^2 - 2xz + y^2 + 4yz + 4x - 2y + 4z - 3 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, determinandone anche la natura dei punti semplici.
  Risposta Iperboloide iperbolico. **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano α: $4x - 3y + z - 3 = 0$.
  Risposta Unione di due rette reali e distinte. **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Primo appello - 17/01/2019

4

COGNOME	NOME
Ingegneria gestionale	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & k & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.
  Risposta $S = \left\{\left(\frac{4k+7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right)\right\}$ se $k \neq 1$; $S = \left\{\left(-\frac{1+5a}{2}, a, 4+4a\right) : a \in \mathbb{R}\right\}$ se $k = 1$. ________ **(pt.3A)**

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (5, -1, 1)$ è un autovettore di A_k.
  Risposta $k = 16$. ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

- determinare il polinomio caratteristico di A; **Risposta** $p_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$. ________ **(pt.2A)**

- determinare gli autovalori di A; **Risposta** $\lambda = 1, 2$ ________ **(pt.1A)**

- dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta, e in tal caso scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. **Risposta** A è diagonalizzabile, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Siano $U = \{(3a+b+3c, 2b-6c, -3a-2b, 8a+16c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(5a+b, -2a, -4a, 16a+2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Si determini:

- una base di $U + W$; **Risposta** $\mathcal{B} = ((3, 0, -3, 8), (1, 2, -2, 0), (1, 0, 0, 2))$. ________ **(pt.2A)**

- un complemento diretto di U; **Risposta** $\{(0, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. ________ **(pt.2A)**

- la dimensione di un complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\dim(W^\perp) = 2$. ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 4. Date le rette r: $x + y - z - 2 = 2x + y - 3z - 8 = 0$ e s: $x - y - z - 4 = 2y + 3z - 4 = 0$ di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$,

- determinare un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r e s;
  Risposta $25x + 5y - 112 = 7x + z - 36 = 0$. ________ **(pt.3G)**

- determinare un'equazione cartesiana di due piani paralleli α e β tali che $r \subseteq \alpha$ e $s \subseteq \beta$.
  Risposta $\alpha : x - 5y - 7z - 26 = 0$; $\beta : x - 5y - 7z + 4 = 0$. ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la conica $\mathcal{C}_k$: $x^2 - 2kxy + y^2 - 3x - 3y + 9 = 0$. Si determini:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è l'unione di due rette reali distinte. **Risposta** Mai. ________ **(pt.2G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. **Risposta** $k = 1$. ________ **(pt.2G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (-1, 1)$ e $Q = (2, 0)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = 2$. ________ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la quadrica $\mathcal{Q}$: $x^2 - 2xz + y^2 + 4yz + 4z + 5 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, determinandone anche la natura dei punti semplici.
  Risposta Iperboloide ellittico. ________ **(pt.3G)**

- Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano α: $4x - 6y + z - 1 = 0$.
  Risposta Unione di due rette immaginarie e coniugate. ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Primo appello - 17/01/2019

5

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.
  Risposta $S = \left\{\left(\frac{4k+7}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)\right\}$ se $k \neq 1$; $S = \left\{\left(-\frac{1+5a}{2}, 4+4a, a\right) : a \in \mathbb{R}\right\}$ se $k = 1$. ______ **(pt.3A)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (1,1,1)$ è un autovettore di A_k.
  Risposta $k = -6$. ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

- determinare il polinomio caratteristico di A; **Risposta** $p_A(t) = (t-1)^2(t+2)^2$. ______ **(pt.2A)**
- determinare gli autovalori di A; **Risposta** $\lambda = 1, -2$ ______ **(pt.1A)**
- dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta, e in tal caso scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. **Risposta** A è diagonalizzabile, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Siano $U = \{(3a - b + 3c, -2b - 6c, -3a + 2b, 8a + 16c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(5a + 2b, -2a + b, -4a + b, 16a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Si determini:

- una base di $U + W$; **Risposta** $\mathcal{B} = ((3, 0, -3, 8), (1, 2, -2, 0), (2, 1, 1, 2))$. ______ **(pt.2A)**
- un complemento diretto di U; **Risposta** $\{(0, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. ______ **(pt.2A)**
- la dimensione di un complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\dim(W^\perp) = 2$. ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 4. Date le rette r: $x + y - z + 4 = 2x + y - 3z + 4 = 0$ e s: $x - y - z + 2 = 2y + 3z - 4 = 0$ di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$,

- determinare un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r e s;
  Risposta $25x + 5y + 38 = 7x + z + 6 = 0$. ______ **(pt.3G)**
- determinare un'equazione cartesiana di due piani paralleli α e β tali che $r \subseteq \alpha$ e $s \subseteq \beta$.
  Risposta $\alpha : x - 5y - 7z - 20 = 0$; $\beta : x - 5y - 7z + 10 = 0$. ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la conica $\mathcal{C}_k$: $x^2 - 4kxy + 4y^2 - 3x - 6y + 9 = 0$. Si determini:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è l'unione di due rette reali distinte. **Risposta** Mai. ______ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. **Risposta** $k = 1$. ______ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (-1, 1)$ e $Q = (2, 0)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = \frac{5}{8}$. ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la quadrica $\mathcal{Q}$: $x^2 - 2xz + y^2 + 4yz + 6x - 6y + 4z - 7 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, determinandone anche la natura dei punti semplici.
  Risposta Iperboloide iperbolico. ______ **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano α: $4x - 3y + z - 4 = 0$.
  Risposta Unione di due rette reali e distinte. ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Primo appello - 17/01/2019

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.
  Risposta $S = \{(-2, -1, 2k+4)\}$ se $k \neq 1$; $S = \{(2+4a, a, 1-5a) : a \in \mathbb{R}\}$ se $k = 1$. ______ **(pt.3A)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (2, 2, 1)$ è un autovettore di A_k.
  Risposta $k = -\frac{15}{2}$. ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

- determinare il polinomio caratteristico di A; **Risposta** $p_A(t) = (t+1)^2(t-2)^2$. ______ **(pt.2A)**
- determinare gli autovalori di A; **Risposta** $\lambda = -1, 2$ ______ **(pt.1A)**
- dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta, e in tal caso scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. **Risposta** A è diagonalizzabile, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Siano $U = \{(2a+b-c, a-2b+12c, 2a+b-c, 5a+b+5c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(8a, b-a, 8a, 17a+2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Si determini:

- una base di $U + W$; **Risposta** $\mathcal{B} = ((2, 1, 2, 5), (1, -2, 1, 1), (0, 1, 0, 2))$. ______ **(pt.2A)**
- un complemento diretto di U; **Risposta** $\{(0, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. ______ **(pt.2A)**
- la dimensione di un complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\dim(W^{\perp}) = 2$. ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 4. Date le rette r: $x + y - z + 5 = 2x + y - 3z + 6 = 0$ e s: $x - y - z + 3 = 2y + 3z - 4 = 0$ di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$,

- determinare un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r e s;
  Risposta $25x + 5y + 63 = 7x + z + 13 = 0$. ______ **(pt.3G)**
- determinare un'equazione cartesiana di due piani paralleli α e β tali che $r \subseteq \alpha$ e $s \subseteq \beta$.
  Risposta $\alpha : x - 5y - 7z - 19 = 0$; $\beta : x - 5y - 7z + 11 = 0$. ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la conica $\mathcal{C}_k$: $x^2 + 4kxy + 4y^2 - 3x - 6y + 9 = 0$. Si determini:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è l'unione di due rette reali distinte. **Risposta** Mai. ______ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. **Risposta** $k = -1$. ______ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (-1, 1)$ e $Q = (2, 0)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = -\frac{5}{8}$. ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la quadrica $\mathcal{Q}$: $x^2 - 2xz + y^2 + 4yz - 4x + 8y + 4z + 13 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, determinandone anche la natura dei punti semplici.
  Risposta Iperboloide ellittico. ______ **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano α: $4x - 6y + z + 1 = 0$.
  Risposta Unione di due rette immaginarie e coniugate. ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Primo appello - 17/01/2019

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.
  Risposta $S = \{(2k+4, -2, -1))\}$ se $k \neq 1$; $S = \{(1-5a, 2+4a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ se $k = 1$. ________ **(pt.3A)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (1, 1, 1)$ è un autovettore di A_k.
  Risposta $k = -5$. ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

- determinare il polinomio caratteristico di A; **Risposta** $p_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$. ________ **(pt.2A)**
- determinare gli autovalori di A; **Risposta** $\lambda = 1, 2$ ________ **(pt.1A)**
- dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta, e in tal caso scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. **Risposta** A è diagonalizzabile, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Siano $U = \{(2a+b+c, a-2b-12c, 2a+b+c, 5a+b-5c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(4a, b+7a, 4a, 13a+2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Si determini:

- una base di $U + W$; **Risposta** $\mathcal{B} = ((2, 1, 2, 5), (1, -2, 1, 1), (0, 1, 0, 2))$. ________ **(pt.2A)**
- un complemento diretto di U; **Risposta** $\{(0, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. ________ **(pt.2A)**
- la dimensione di un complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\dim(W^\perp) = 2$. ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 4. Date le rette r: $x + y - z - 1 = 2x + y - 3z - 8 = 0$ e s: $x - y - z - 3 = 2y + 3z + 2 = 0$ di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$,

- determinare un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r e s;
  Risposta $25x + 5y - 37 = 7x + z - 13 = 0$. ________ **(pt.3G)**
- determinare un'equazione cartesiana di due piani paralleli α e β tali che $r \subseteq \alpha$ e $s \subseteq \beta$.
  Risposta $\alpha : x - 5y - 7z - 37 = 0$; $\beta : x - 5y - 7z - 7 = 0$. ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la conica $\mathcal{C}_k$: $4x^2 + 8kxy + 4y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$. Si determini:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è l'unione di due rette reali distinte. **Risposta** Mai. ________ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. **Risposta** $k = -1$. ________ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (-1, 1)$ e $Q = (2, 0)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = \frac{5}{8}$. ________ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la quadrica $\mathcal{Q}$: $x^2 - 2xz + y^2 + 4yz + 8x - 10y + 4z - 11 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, determinandone anche la natura dei punti semplici.
  Risposta Iperboloide iperbolico. ________ **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano α: $4x - 3y + z - 5 = 0$.
  Risposta Unione di due rette reali e distinte. ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Algebra e Geometria - Primo appello - 17/01/2019

8

COGNOME	NOME
Ingegneria gestionale	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A_kX = B_k$.
  Risposta $S = \{(2k+4, -1, -2)\}$ se $k \neq 1$; $S = \{(1-5a, a, 2+4a) : a \in \mathbb{R}\}$ se $k = 1$. ________ **(pt.3A)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (1,1,1)$ è un autovettore di A_k.
  Risposta $k = -5$. ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

- determinare il polinomio caratteristico di A; **Risposta** $p_A(t) = (t-1)^2(t+2)^2$. ________ **(pt.2A)**
- determinare gli autovalori di A; **Risposta** $\lambda = 1, -2$ ________ **(pt.1A)**
- dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta, e in tal caso scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. **Risposta** A è diagonalizzabile, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Siano $U = \{(3a-b+2c, 2a+2b, a-b+c, 7a+b+3c) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(3a+b, b+10a, 5b-a, 17a+2b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Si determini:

- una base di $U+W$; **Risposta** $\mathcal{B} = ((3,2,1,7), (-1,2,-1,1), (1,1,5,2))$. ________ **(pt.2A)**
- un complemento diretto di U; **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. ________ **(pt.2A)**
- la dimensione di un complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\dim(W^\perp) = 2$. ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 4. Date le rette r: $x+y-z-2 = 2x+y-3z-11 = 0$ e s: $x-y-z-4 = 2y+3z+5 = 0$ di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$,

- determinare un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r e s;
  Risposta $25x+5y-37 = 7x+z-12 = 0$. ________ **(pt.3G)**
- determinare un'equazione cartesiana di due piani paralleli α e β tali che $r \subseteq \alpha$ e $s \subseteq \beta$.
  Risposta $\alpha : x-5y-7z-44 = 0$; $\beta : x-5y-7z-14 = 0$. ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la conica $\mathcal{C}_k$: $4x^2 - 8kxy + 4y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$. Si determini:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è l'unione di due rette reali distinte. **Risposta** Mai. ________ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. **Risposta** $k = 1$. ________ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (-1,1)$ e $Q = (2,0)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = -\frac{5}{8}$. ________ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la quadrica $\mathcal{Q}$: $x^2 - 2xz + y^2 + 4yz + 4x - 8y + 4z - 3 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, determinandone anche la natura dei punti semplici.
  Risposta Iperboloide ellittico. ________ **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano α: $4x - 6y + z - 3 = 0$.
  Risposta Unione di due rette immaginarie e coniugate. ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Primo appello - 17/01/2019

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni del sistema $A_k X = B_k$.
  Risposta $S = \{(-1, -2, -2k-4))\}$ se $k \neq 1$; $S = \{(a, 2+4a, -1+5a) : a \in \mathbb{R}\}$ se $k = 1$. ______ **(pt.3A)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (2, 2, 1)$ è un autovettore di A_k.
  Risposta $k = -\frac{13}{2}$. ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice reale $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

- determinare il polinomio caratteristico di A; **Risposta** $p_A(t) = (t+1)^2(t+2)^2$. ______ **(pt.2A)**
- determinare gli autovalori di A; **Risposta** $\lambda = -1, -2$ ______ **(pt.1A)**
- dire se A è diagonalizzabile, giustificando la risposta, e in tal caso scrivere una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. **Risposta** A è diagonalizzabile, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Siano $U = \{(3a+b+2c, 2a-2b, a+b+c, 7a-b+3c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(3a, b+10a, 5b-a, 17a+b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Si determini:

- una base di $U + W$; **Risposta** $\mathcal{B} = ((3, 2, 1, 7), (1, -2, 1, -1), (0, 1, 5, 1))$. ______ **(pt.2A)**
- un complemento diretto di U; **Risposta** $\{(0, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. ______ **(pt.2A)**
- la dimensione di un complemento ortogonale di W rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\dim(W^{\perp}) = 2$. ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 4. Date le rette r: $x + y - z + 3 = 2x + y - 3z + 4 = 0$ e s: $x - y - z + 1 = 2y + 3z - 10 = 0$ di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$,

- determinare un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r e s;
  Risposta $25x + 5y - 37 = 7x + z - 17 = 0$. ______ **(pt.3G)**
- determinare un'equazione cartesiana di due piani paralleli α e β tali che $r \subseteq \alpha$ e $s \subseteq \beta$.
  Risposta $\alpha : x - 5y - 7z - 9 = 0$; $\beta : x - 5y - 7z + 21 = 0$. ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la conica $\mathcal{C}_k$: $9x^2 - 6kxy + y^2 - 9x - 3y + 9 = 0$. Si determini:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è l'unione di due rette reali distinte. **Risposta** Mai. ______ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. **Risposta** $k = 1$. ______ **(pt.2G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui i punti $P = (-1, 1)$ e $Q = (2, 0)$ sono coniugati rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = -\frac{5}{2}$. ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{\mathbb{E}_2}(\mathbb{C})$, sia data la quadrica $\mathcal{Q}$: $x^2 - 2xz + y^2 + 4yz - 4x + 14y + 4z + 13 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, determinandone anche la natura dei punti semplici.
  Risposta Iperboloide iperbolico. ______ **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano α: $4x - 3y + z + 1 = 0$.
  Risposta Unione di due rette reali e distinte. ______ **(pt.2G)**