UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2018

1

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$: unica soluzione; $k = 1$: ∞^1 soluzioni ________ **(pt.4)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema; **Risposta** $S = \{(1-\alpha, -\alpha, 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3)**
- dimensione e una base di $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$. **Risposta** dimensione: 2; base: $((1,0,0),(1,1,-2))$ ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia dato il sottospazio $U = \{(x, x-y, x+3y, 2x-3y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base di U e una base di $\mathbb{R}^4$ che estenda tale base;

  Risposta $((1,1,1,2),(0,1,-3,3))$; $((1,1,1,2),(0,1,-3,3),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ ________ **(pt.2)**
- un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$. **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k; **Risposta** $k, -1, 4$ ________ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -1, 4$ ________ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq -1, 4$ ________ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, motivando la risposta.

  Risposta mai, la matrice A_k non è mai simmetrica ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Siano U e W due sottospazi di dimensione 4 di $\mathbb{R}^{2,3}(\mathbb{R})$. Si dica qual è la dimensione massima e minima di $U \cap W$.
Risposta Minima: 2; Massima: 4 ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $(1,2,0,1)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,1,1,1)$, $(2,4,2,3)$.

- Si determini la dimensione di U. **Risposta** 3 ________ **(pt.1)**

Inoltre, rispetto al prodotto standard euclideo di $\mathbb{R}^4$, si determinino:

- una base ortonormale di U; **Risposta** $((1,0,0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}))$ ________ **(pt.3)**
- un complemento ortogonale di U. **Risposta** $\{(0,a,a,-2a) : a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2018

2

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 2 & k+2 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq -1$: unica soluzione; $k = -1$: ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**

Posto $k = -1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema; **Risposta** $S = \{(1-\alpha, -\alpha, 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**
- dimensione e una base di $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$. **Risposta** dimensione: 2; base: $((1,0,0),(1,1,-2))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia dato il sottospazio $U = \{(x, x+3y, x+y, 2x-y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base di U e una base di $\mathbb{R}^4$ che estenda tale base;

  Risposta $((1,1,1,2),(0,3,1,-1))$; $((1,1,1,2),(0,3,1,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ ______ **(pt.2)**
- un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$. **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k; **Risposta** $k, 1, 4$ ______ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq 1, 4$ ______ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 1, 4$ ______ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, motivando la risposta.

  Risposta mai, la matrice A_k non è mai simmetrica ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Siano U e W due sottospazi di dimensione 7 di $\mathbb{R}^{3,4}(\mathbb{R})$. Si dica qual è la dimensione massima e minima di $U \cap W$.
Risposta Minima: 2; Massima: 7 ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $(2,1,-1,-3)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,1,1,-1)$, $(4,5,-1,-8)$.

- Si determini la dimensione di U. **Risposta** 3 ______ **(pt.1)**

Inoltre, rispetto al prodotto standard euclideo di $\mathbb{R}^4$, si determinino:

- una base ortonormale di U; **Risposta** $\left((\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})\right)$ ______ **(pt.3)**
- un complemento ortogonale di U. **Risposta** $\{(3a, a, a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2018

3

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k & 2 \\ 0 & 2 & k \\ 2 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 2$: unica soluzione; $k = 2$: ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**

Posto $k = 2$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema; **Risposta** $S = \{(1, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**
- dimensione e una base di $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$. **Risposta** dimensione: 2; base: $((1,0,0),(0,1,-1))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia dato il sottospazio $U = \{(x, x+2y, x-3y, 2x-y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base di U e una base di $\mathbb{R}^4$ che estenda tale base;

  Risposta $((1,1,1,2),(0,2,-3,-1))$; $((1,1,1,2),(0,2,-3,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ ______ **(pt.2)**
- un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$. **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k; **Risposta** $k, -1, 4$ ______ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -1, 4$ ______ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq -1, 4$ ______ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, motivando la risposta.

  Risposta mai, la matrice A_k non è mai simmetrica ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Siano U e W due sottospazi di dimensione 4 di $\mathbb{R}^{3,2}(\mathbb{R})$. Si dica qual è la dimensione massima e minima di $U \cap W$.

Risposta Minima: 2; Massima: 4 ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $(1,2,0,1)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,1,1,1)$, $(2,9,1,5)$.

- Si determini la dimensione di U. **Risposta** 3 ______ **(pt.1)**

Inoltre, rispetto al prodotto standard euclideo di $\mathbb{R}^4$, si determinino:

- una base ortonormale di U; **Risposta** $((1,0,0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}))$ ______ **(pt.3)**
- un complemento ortogonale di U. **Risposta** $\{(0,a,a,-2a) : a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 0 & 2 & k+1 \\ 1 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 0$: unica soluzione; $k = 0$: ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema; **Risposta** $S = \{(1-\alpha, -\alpha, 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**
- dimensione e una base di $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$. **Risposta** dimensione: 2; base: $((1,0,0),(1,1,-2))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia dato il sottospazio $U = \{(x, x+y, 2x-3y, 3x-y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base di U e una base di $\mathbb{R}^4$ che estenda tale base;

  Risposta $((1,1,2,3),(0,1,-3,-1))$; $((1,1,2,3),(0,1,-3,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ ______ **(pt.2)**
- un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$. **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k; **Risposta** $k, 1, 4$ ______ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq 1, 4$ ______ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 1, 4$ ______ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, motivando la risposta.

  Risposta mai, la matrice A_k non è mai simmetrica ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Siano U e W due sottospazi di dimensione 8 di $\mathbb{R}^{5,3}(\mathbb{R})$. Si dica qual è la dimensione massima e minima di $U \cap W$.
Risposta Minima: 1; Massima: 8 ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $(1,0,2,1)$, $(0,1,1,1)$, $(0,1,-1,0)$, $(2,1,7,4)$.

- Si determini la dimensione di U. **Risposta** 3 ______ **(pt.1)**

Inoltre, rispetto al prodotto standard euclideo di $\mathbb{R}^4$, si determinino:

- una base ortonormale di U; **Risposta** $((1,0,0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}))$ ______ **(pt.3)**
- un complemento ortogonale di U. **Risposta** $\{(0,a,a,-2a) : a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2018

5

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$: unica soluzione; $k = 1$: ∞^1 soluzioni ________ **(pt.4)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema; **Risposta** $S = \{(1+\alpha, -2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3)**
- dimensione e una base di $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$. **Risposta** dimensione: 2; base: $((1,0,0),(1,-2,1))$ ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia dato il sottospazio $U = \{(x, x+2y, 2x+y, x-4y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base di U e una base di $\mathbb{R}^4$ che estenda tale base;

  Risposta $((1,1,2,1),(0,2,1,-4))$; $((1,1,2,1),(0,2,1,-4),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ ________ **(pt.2)**
- un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$. **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k; **Risposta** $k, 2, 5$ ________ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq 2, 5$ ________ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 2, 5$ ________ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, motivando la risposta.

  Risposta mai, la matrice A_k non è mai simmetrica ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Siano U e W due sottospazi di dimensione 7 di $\mathbb{R}^{4,3}(\mathbb{R})$. Si dica qual è la dimensione massima e minima di $U \cap W$.
Risposta Minima: 2; Massima: 7 ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $(2,4,0,1)$, $(1,0,-1,0)$, $(1,0,1,1)$, $(3,8,5,4)$.

- Si determini la dimensione di U. **Risposta** 3 ________ **(pt.1)**

Inoltre, rispetto al prodotto standard euclideo di $\mathbb{R}^4$, si determinino:

- una base ortonormale di U; **Risposta** $((\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (0,1,0,0))$ ________ **(pt.3)**
- un complemento ortogonale di U. **Risposta** $\{(a, 0, a, -2a) : a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2018

6

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 2 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$: unica soluzione; $k = 1$: ∞^1 soluzioni ________ **(pt.4)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema; **Risposta** $S = \{(1+\alpha, 2\alpha, -4\alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3)**
- dimensione e una base di $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$. **Risposta** dimensione: 2; base: $((1,0,0),(1,2,-4))$ ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia dato il sottospazio $U = \{(x, x+y, 2x-4y, x+2y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base di U e una base di $\mathbb{R}^4$ che estenda tale base;

  Risposta $((1,1,2,1),(0,1,-4,2))$; $((1,1,2,1),(0,1,-4,2),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ ________ **(pt.2)**
- un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$. **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k; **Risposta** $k, 2, 5$ ________ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq 2, 5$ ________ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 2, 5$ ________ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, motivando la risposta.

  Risposta mai, la matrice A_k non è mai simmetrica ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Siano U e W due sottospazi di dimensione 8 di $\mathbb{R}^{5,3}(\mathbb{R})$. Si dica qual è la dimensione massima e minima di $U \cap W$.
Risposta Minima: 1; Massima: 8 ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $(2,0,2,1)$, $(0,1,-1,0)$, $(4,4,6,5)$, $(0,1,1,1)$.

- Si determini la dimensione di U. **Risposta** 3 ________ **(pt.1)**

Inoltre, rispetto al prodotto standard euclideo di $\mathbb{R}^4$, si determinino:

- una base ortonormale di U; **Risposta** $((1,0,0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}))$ ________ **(pt.3)**
- un complemento ortogonale di U. **Risposta** $\{(0,a,a,-2a) : a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2018

7

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq -1$: unica soluzione; $k = -1$: ∞^1 soluzioni ________ **(pt.4)**

Posto $k = -1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema; **Risposta** $S = \{(-1+3\alpha, \alpha, 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3)**
- dimensione e una base di $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$. **Risposta** dimensione: 2; base: $((1,0,0),(3,1,2))$ ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia dato il sottospazio $U = \{(x, 2x+y, 2x+y, 2x-y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base di U e una base di $\mathbb{R}^4$ che estenda tale base;

  Risposta $((1,2,2,2),(0,1,1,-1))$; $((1,2,2,2),(0,1,1,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ ________ **(pt.2)**
- un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$. **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k; **Risposta** $k, -1, 4$ ________ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -1, 4$ ________ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq -1, 4$ ________ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, motivando la risposta.

  Risposta mai, la matrice A_k non è mai simmetrica ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Siano U e W due sottospazi di dimensione 5 di $\mathbb{R}^{4,2}(\mathbb{R})$. Si dica qual è la dimensione massima e minima di $U \cap W$.
Risposta Minima: 2; Massima: 5 ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $(3,1,2,0)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,1,-1)$, $(2,0,1,-1)$.

- Si determini la dimensione di U. **Risposta** 3 ________ **(pt.1)**

Inoltre, rispetto al prodotto standard euclideo di $\mathbb{R}^4$, si determinino:

- una base ortonormale di U; **Risposta** $((1,0,0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}))$ ________ **(pt.3)**
- un complemento ortogonale di U. **Risposta** $\{(0,-2a,a,a) : a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2018

8

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ 0 & k+1 & 2 \\ 1 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 0$: unica soluzione; $k = 0$: ∞^1 soluzioni ____ **(pt.4)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema; **Risposta** $S = \{(1+\alpha, -2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \alpha \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.3)**
- dimensione e una base di $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$. **Risposta** dimensione: 2; base: $((1,0,0),(1,-2,1))$ ____ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia dato il sottospazio $U = \{(2x, x+y, x-4y, x+3y) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x, y \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base di U e una base di $\mathbb{R}^4$ che estenda tale base;

  Risposta $((2,1,1,1),(0,1,-4,3))$; $((2,1,1,1),(0,1,-4,3),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ ____ **(pt.2)**
- un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$. **Risposta** $\{(0,0,a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k; **Risposta** $k, 2, 5$ ____ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq 2, 5$ ____ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 2, 5$ ____ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, motivando la risposta.

  Risposta mai, la matrice A_k non è mai simmetrica ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Siano U e W due sottospazi di dimensione 10 di $\mathbb{R}^{6,3}(\mathbb{R})$. Si dica qual è la dimensione massima e minima di $U \cap W$.
Risposta Minima: 2; Massima: 10 ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $(2,3,0,1)$, $(1,0,-1,0)$, $(1,0,1,1)$, $(3,6,-7,-2)$.

- Si determini la dimensione di U. **Risposta** 3 ____ **(pt.1)**

Inoltre, rispetto al prodotto standard euclideo di $\mathbb{R}^4$, si determinino:

- una base ortonormale di U; **Risposta** $((\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0,1,0,0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}))$ ____ **(pt.3)**
- un complemento ortogonale di U. **Risposta** $\{(a, 0, a, -2a) : a \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2018

9

COGNOME	NOME
INGEGNERIA GESTIONALE	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq -2$: unica soluzione; $k = -2$: ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**

Posto $k = -2$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema; **Risposta** $S = \{(2 + 4\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**
- dimensione e una base di $\mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$. **Risposta** dimensione: 2; base: $((1, 0, 0), (4, 1, 1))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia dato il sottospazio $U = \{(2x, x-3y, x+y, x-2y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base di U e una base di $\mathbb{R}^4$ che estenda tale base;

  Risposta $((2, 1, 1, 1), (0, -3, 1, -2))$; $((2, 1, 1, 1), (0, -3, 1, -2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ ______ **(pt.2)**
- un complemento diretto di U in $\mathbb{R}^4$. **Risposta** $\{(0, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k; **Risposta** $k, -1, 4$ ______ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -1, 4$ ______ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq -1, 4$ ______ **(pt.2)**
- per quali valori di k la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, motivando la risposta.

  Risposta mai, la matrice A_k non è mai simmetrica ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Siano U e W due sottospazi di dimensione 6 di $\mathbb{R}^{4,2}(\mathbb{R})$. Si dica qual è la dimensione massima e minima di $U \cap W$.

Risposta Minima: 4; Massima: 6 ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $(1, 3, -1, 3)$, $(1, 0, -1, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 3, -7, 6)$.

- Si determini la dimensione di U. **Risposta** 3 ______ **(pt.1)**

Inoltre, rispetto al prodotto standard euclideo di $\mathbb{R}^4$, si determinino:

- una base ortonormale di U; **Risposta** $((\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{-3}{\sqrt{15}}))$ ______ **(pt.3)**
- un complemento ortogonale di U. **Risposta** $\{(a, -2a, a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**