

UNIVERSITA' CATTOLICA DEL SACRO
CUORE

Sede di Brescia

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Geometria Superiore 1

Prof.ssa Silvia Pianta

Anno Accademico 2011/2012

Indice

1	Premessa sulle strutture geometriche	6
1.1	Spazi topologici	7
1.2	Spazi metrici	7
1.3	Piani affini	9
1.4	Spazi vettoriali	11
1.5	Spazi proiettivi n-dimensionali	12
1.6	Spazi lineari e semilineari	15
2	Isomorfismi e automorfismi	17
2.1	Isomorfismi	17
2.1.1	Omeomorfismi tra spazi topologici	18
2.1.2	Isometrie	18
2.1.3	Affinità	19
2.1.4	Applicazioni semilineari bigettive	20
2.1.5	Collineazioni tra spazi proiettivi	21
2.2	Automorfismi	26
2.2.1	Piano affine su un campo	27
2.2.2	Spazi vettoriali	31
2.2.3	Spazi proiettivi	32
3	Il piano euclideo reale	34
3.1	Piano affine con prodotto scalare euclideo	35
3.2	Piano affine metrico	37
3.3	Isometrie del piano euclideo	38

3.3.1	Rotazioni di centro O	40
3.3.2	Simmetrie assiali rispetto a rette vettoriali	41
3.3.3	Rotazioni di centro qualsiasi	42
3.3.4	Simmetrie assiali di asse qualsiasi	43
3.3.5	Prodotti di simmetrie assiali	44
3.4	Classificazione delle isometrie di \mathbb{R}^2	48
3.5	Isometrie di \mathbb{R}^2 come funzioni di variabile complessa	51
3.6	Similitudini di \mathbb{R}^2	52
4	Il piano assoluto reale	56
4.1	Categoricità degli assiomi di piano assoluto reale	61
4.2	Isometrie e simmetrie assiali in un piano assoluto	63
5	Il piano iperbolico reale	65
5.1	Proprietà del piano iperbolico reale	65
5.1.1	Rette h-parallele e angolo di parallelismo	65
5.1.2	Rette iperparallele	68
5.1.3	Rette incidenti	69
5.2	Il modello del semipiano di Poincaré	69
5.3	Il piano di Moebius e le sue trasformazioni	74
5.3.1	Inversione circolare	74
5.3.2	Proiezione stereografica	77
5.3.3	Le trasformazioni di Moebius	80
5.4	Isometrie del piano iperbolico	83
5.4.1	Il gruppo delle isometrie di $\mathbb{H}_2(\mathbb{R})$	83
5.4.2	Isometrie dirette	85
5.4.3	L'inversione circolare nel modello di Poincaré	87
5.4.4	Simmetrie assiali e isometrie inverse nel modello di Poincaré	88
6	Il piano ellittico reale	90
6.1	Dalla geometria sferica al piano ellittico	90
6.2	Isometrie della sfera in \mathbb{R}^3	92

6.3 Il piano ellittico reale e le sue isometrie	95
Bibliografia	100

Un ringraziamento particolare al dott. Simone Alghisi, che ha permesso la stesura di questi appunti curandone con impegno e intelligenza la prima edizione nell'anno accademico 2005/06.

Capitolo 1

Premessa sulle strutture geometriche

Oggetto di studio della Geometria sono le strutture geometriche, i loro gruppi di trasformazioni (isomorfismi e automorfismi) e le proprietà invarianti rispetto alle trasformazioni di tali gruppi.

In questo primo capitolo diamo uno sguardo alle proprietà fondamentali di alcune classiche strutture geometriche. Come riferimenti bibliografici per una trattazione più approfondita di tali concetti suggeriamo ad esempio [17] e [19] per gli spazi topologici e metrici, [1], [2], [6], [7], [16], [20] per i piani affini, gli spazi vettoriali e proiettivi.

1.1 Definizione. *Siano \mathcal{P} un insieme non vuoto, e \mathcal{F} una famiglia non vuota di parti di \mathcal{P} , ossia $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$. Chiamiamo spazio geometrico relativo a \mathcal{F} la coppia $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$. Gli elementi di \mathcal{P} vengono chiamati punti, mentre l'insieme \mathcal{P} è detto sostegno dello spazio geometrico $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ e la famiglia \mathcal{F} è detta struttura geometrica su \mathcal{P} .*

Gli elementi di \mathcal{F} prendono nomi diversi a seconda del tipo di struttura considerata. Vediamo ora alcuni esempi di strutture geometriche particolarmente importanti.

1.1 Spazi topologici

Siano X un insieme con $X \neq \emptyset$ e $\tau \subseteq \mathfrak{P}(X)$ una famiglia di parti di X che soddisfi le seguenti proprietà:

- (a) $X, \emptyset \in \tau$;
- (b) per ogni famiglia $\mathcal{F} \subseteq \tau$ si ha che $\bigcup \mathcal{F} \in \tau$;
- (c) per ogni famiglia finita $\mathcal{F} \subseteq \tau$ si ha che $\bigcap \mathcal{F} \in \tau$.

Diciamo allora che τ è una *struttura topologica* o *topologia* sull'insieme X , gli elementi di τ vengono detti *aperti* e la coppia (X, τ) si dice *spazio topologico*.

1.2 Spazi metrici

1.2 Definizione. Sia X un insieme non vuoto. Diciamo che la funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è una *metrica* o *distanza* se, per ogni $x, y, z \in X$:

- (a) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- (b) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Chiamiamo *spazio metrico* la coppia (X, d) , ove d sia una *metrica* su $X \neq \emptyset$.

1.3 Definizione. Siano (X, d) uno spazio metrico, $r \in]0, +\infty[$ e $x \in X$. Poniamo

$$B(x, r) := \{\xi \in X : d(x, \xi) < r\}.$$

Chiamiamo $B(x, r)$ la *palla aperta* di centro x e raggio r .

1.4 Definizione. Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora la famiglia $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$ delle *palle aperte* in X definisce una *struttura metrica* su X .

Si ricordi che a partire dalla famiglia \mathcal{B} di tutte le palle aperte, si può definire una famiglia più ampia di parti di X , precisamente

$$\tau_d := \{A \subseteq X : \forall a \in A \exists r \in \mathbb{R}^+ \text{ con } B(a, r) \subseteq A\} \subseteq \mathfrak{P}(X).$$

Chiamiamo τ_d la *famiglia degli aperti* di (X, d) . Risulta banalmente $\mathcal{B} \subseteq \tau_d$.

1.5 Definizione. Siano (X, d) uno spazio metrico e τ_d la famiglia degli aperti ad esso associata. Per ogni $S \subseteq X$ chiamiamo *frontiera* di S l'insieme

$$\partial S := \{x \in X : x \in A \in \tau_d \implies A \cap S \neq \emptyset \neq A \cap (X \setminus S)\}.$$

Chiamiamo *chiusura* di S l'insieme $\bar{S} := S \cup \partial S$.

1.6 Osservazione. E' interessante osservare che, dato uno spazio metrico (X, d) , utilizzando opportunamente le proprietà della famiglia \mathcal{B} delle palle aperte, è possibile ricostruire la metrica.

Diamo qui solo un suggerimento per un possibile modo di ridefinire la funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ a partire dalla struttura metrica \mathcal{B} :

Per ogni $x, y \in X$ poniamo

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se e solo se } x = y \\ r > 0 & \text{se e solo se } y \in \partial B(x, r) \end{cases}.$$

Quali sono le proprietà a cui deve soddisfare la famiglia \mathcal{B} che assicurano che questa definizione sia ben posta, ovvero che la $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sia proprio una funzione? Per esempio, occorre e basta richiedere che

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists r \in \mathbb{R}^+ : y \in \partial B(x, r).$$

Infatti, utilizzando questa proprietà si può dimostrare che (Esercizio!):

$$\forall x, y \in X, x \neq y : d(x, y) = r > 0 \iff y \in \partial B(x, r).$$

Si noti che questa condizione non è sempre verificata negli spazi metrici: per esempio, se si considera uno spazio metrico discreto si osserva subito che in esso la frontiera di qualunque palla aperta è vuota, mentre se il supporto ha cardinalità

maggiore di 1, esistono coppie di punti distinti che hanno distanza 1. Se però si assume questa proprietà, da essa si ricavano facilmente altre relazioni che valgono per le palle aperte, da cui si possono poi dedurre le proprietà della distanza d . In particolare, la proprietà

$$\forall x, y \in X : y \in \partial B(x, r) \iff x \in \partial B(y, r)$$

si traduce nella simmetria della funzione d , mentre dalla relazione

$$\forall x, y \in X : y \in \overline{B(x, r)} \implies (\forall s \in \mathbb{R}^+ B(y, s) \subseteq B(x, r + s))$$

segue facilmente la disuguaglianza triangolare.

1.7 Osservazione. Se (X, d) è uno spazio metrico e τ_d la famiglia degli aperti in X definita a partire dalla metrica, allora τ_d gode delle proprietà (a), (b), (c) che definiscono una topologia su X : essa verrà detta la topologia indotta dalla metrica d e in tal caso (X, τ_d) si dice spazio topologico metrizzabile.

1.3 Piani affini

1.8 Definizione. Siano \mathbb{K} un campo (o corpo), $\mathbb{A}(\mathbb{K}^2)$ il piano affine associato allo spazio vettoriale \mathbb{K}^2 . Poniamo $\mathcal{P} := \mathbb{K}^2$ e

$$\mathcal{R} := \{a + \langle x \rangle : a \in \mathbb{K}^2, x \in (\mathbb{K}^2)^*\}.$$

Chiamiamo \mathcal{R} famiglia delle rette di $\mathbb{A}(\mathbb{K}^2)$. Chiamiamo piano affine coordinatizzato (o coordinatizzabile) su \mathbb{K} la coppia $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ e per la famiglia $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ valgono le seguenti proprietà:

(A1) dati comunque due punti distinti di \mathcal{P} , esiste una ed una sola retta di \mathcal{R} tale che li contenga. In simboli:

$$\forall x, y \in \mathcal{P}, x \neq y, \exists! R \in \mathcal{R} : x, y \in R^1;$$

¹Indichiamo con $\overline{x, y}$ la retta passante per i punti x e y .

(A2) dati comunque un punto $p \in \mathcal{P}$ ed una retta $R \in \mathcal{R}$, esiste una ed una sola retta $S \in \mathcal{R}$ per p parallela² ad R . In simboli:

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall R \in \mathcal{R}, \exists! S \in \mathcal{R} : p \in S \text{ e } S \cap R = \emptyset \text{ oppure } S = R.$$

Indichiamo con $(p \parallel R)$ la retta per p parallela ad R . Se $R = a + \langle x \rangle$, allora risulta che $S = p + \langle x \rangle$;

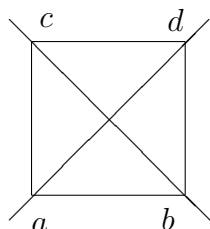
(A3) ogni retta contiene almeno due punti, ed esistono tre punti distinti di \mathcal{P} non allineati (cioè non appartenenti ad una stessa retta). In simboli:

$$\forall R \in \mathcal{R} : |R| \geq 2, \text{ e } |\mathcal{R}| \geq 2.$$

Generalizzando questo esempio si definisce *struttura di piano affine* su un insieme $\mathcal{P} \neq \emptyset$ qualsiasi una famiglia $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ soddisfacente alle condizioni (A1), (A2), (A3), e la coppia $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ si chiama *piano affine*.

1.9 Esempio. Vediamo il più semplice esempio di piano affine.

$$\mathcal{P} := \{a, b, c, d\}, \quad \mathcal{R} := \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}.$$



1.10 Osservazione. Considerando l'esempio precedente, si ha che $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ è una rappresentazione del piano affine $\mathbb{A}(\mathbb{F}_2)$. Infatti basta porre, per esempio, $a = (0, 0)$, $b = (0, 1)$, $c = (1, 0)$, $d = (1, 1)$. Inoltre le rette sono tutti e soli i sottospazi affini 1-dimensionali. Ad esempio

$$\{a, b\} = a + \langle b \rangle = (0, 0) + \langle (0, 1) \rangle,$$

$$\{c, d\} = c + \langle d - c \rangle = (1, 0) + \langle (0, 1) \rangle.$$

²Due rette di \mathcal{R} si dicono parallele se coincidono oppure non hanno punti in comune.

Si noti che esistono delle condizioni geometriche che caratterizzano i piani affini (coordinatizzabili) su campi o su corpi non commutativi tra i piani affini più generali.

1.11 Proposizione (di Pappo affine). *Siano $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ un piano affine geometrico, $R \in \mathcal{R}$ una retta tale che $|R| \geq 3$ e sia $S \in \mathcal{R} \setminus \{R\}$. Siano $a_1, a_2, a_3 \in R$ e $b_1, b_2, b_3 \in S$ due terne di punti distinti. Supponiamo che*

$$\overline{a_1, b_2} \parallel \overline{a_2, b_1} \quad \text{e} \quad \overline{a_1, b_3} \parallel \overline{a_3, b_1}.$$

Allora $\overline{a_2, b_3} \parallel \overline{a_3, b_2}$.

1.12 Osservazione. *Si noti che in un piano affine $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ la cardinalità delle rette risulta essere costante. Infatti per ogni $R, S \in \mathcal{R}$ esiste una biiezione $\varphi : R \rightarrow S$. Verifichiamolo.*

Si consideri un punto $r \in R \setminus S$ e un punto $s \in S \setminus R$. Allora poichè $r \neq s$ risulta ben definita la retta $T := \overline{r, s}$. Sia allora $\varphi : R \rightarrow S$ definita da $\varphi(x) = S \cap (x \parallel T)$. Tale applicazione è una biiezione tra R ed S poichè la retta T non è parallela nè ad R nè ad S per costruzione.

Vale inoltre il seguente

1.13 Teorema. *Un piano affine $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ è coordinatizzabile su un campo \mathbb{K} se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni:*

- (a) *per ogni $R \in \mathcal{R}$ risulta che $|R| = 2$, quindi $(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = \mathbb{A}(\mathbb{F}_2)$;*
- (b) *esiste una retta $R \in \mathcal{R}$ tale che $|R| > 2$, (quindi per ogni $R \in \mathcal{R}$ si ha $|R| > 2$) ed inoltre è verificata la Proposizione di Pappo affine.*

1.4 Spazi vettoriali

1.14 Definizione. *Sia $V = V(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Poniamo $\mathcal{P} := V$ e $\Sigma := \{W \in \mathfrak{P}(V) : W \leq V\}$. La coppia (\mathcal{P}, Σ) è uno spazio geometrico che possiamo ancora chiamare spazio vettoriale.*

Osserviamo che, se $V = V_n(\mathbb{K})$, o più semplicemente $V = \mathbb{K}^n$, la famiglia Σ gode delle proprietà seguenti deducibili dalle proprietà algebriche di $V_n(\mathbb{K})$, ma esprimibili senza utilizzare operazioni vettoriali.

(S1) E' associato ad ogni sottospazio un numero intero k , con $0 \leq k \leq n$, detto *rango* del sottospazio e per ogni $k = 0, \dots, n$ esiste almeno un sottospazio di rango k . Indicando con S_k un sottospazio con $\text{rg}(S_k) = k$, avremo che S_0 è unico ed è il sottospazio banale $\{0\}$, S_1 sono le rette vettoriali, \dots , S_{n-1} sono gli iperpiani vettoriali ed infine S_n è unico e coincide con V stesso;

(S2) se $S_h \leq S_k$, allora $h \leq k$ e risulta $h = k \iff S_h = S_k$;

(S3) $S_i := S_h \cap S_k \in \Sigma$, inoltre

$$S_c := \bigcap \{W : S_h, S_k \leq W\} \in \Sigma.$$

Chiamiamo S_i *sottospazio intersezione* e S_c *sottospazio congiungente* di S_h e S_k . Si noti che risulta $S_c = S_h + S_k$;

(S4) $h + k = i + c$ (formula di Grassmann).

Modificando di poco questo esempio, otteniamo il successivo.

1.5 Spazi proiettivi n-dimensionali

Sia $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$ e poniamo stavolta

$$\mathcal{P} := PG(V) := \{p = \langle \mathbf{v} \rangle : \mathbf{v} \in V^*\},$$

dove $\langle \mathbf{v} \rangle := \{k\mathbf{v} : k \in \mathbb{K}\}$, e poniamo

$$\Sigma := \{S = [W] : W \leq V\}, \quad \text{dove} \quad [W] := \{\langle \mathbf{w} \rangle : \mathbf{w} \in W^*\}.$$

Osserviamo che \mathcal{P} è l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali di V , mentre Σ è l'insieme dei sottospazi proiettivi, i quali non sono altro che i sottospazi vettoriali, ma considerati come insiemi di sottospazi unidimensionali, anzichè loro unioni. Allora

possiamo chiamare, per ogni sottospazio proiettivo W di V , *dimensione (proiettiva) di W* il numero $\text{rg}(W) - 1$. Osserviamo che per $W = \{0\}$ si ha che $[W] = \emptyset$ e $\dim(\emptyset) = -1$. Dunque la proprietà (S1) dell' esempio precedente si formulerà in questo modo:

(S1') ad ogni sottospazio proiettivo è associato un numero intero k ($-1 \leq k \leq n$), detto *dimensione (proiettiva)* del sottospazio e per ogni $k = -1, \dots, n$ esiste almeno un sottospazio $S_k = [W_{k+1}]$ di dimensione k . Avremo che $S_{-1} = \emptyset$ ed è unico, S_0 sono i sottospazi ridotti ad un solo punto, S_1 sono le *rette* proiettive ($[W]$ con $\text{rg}(W) = 2$), \dots , $S_n = \mathcal{P}$ ed è unico.

Le proprietà (S2), (S3), (S4) valgono anche in questo caso, con un'unica variazione in (S3): qui occorre richiedere che la proprietà che l'intersezione di sottospazi è un sottospazio si estenda anche al caso di una famiglia infinita di sottospazi (per famiglie finite la proprietà si ricava per induzione dal fatto che valga per due).

La coppia $(\mathcal{P} = PG(V), \Sigma)$ viene chiamata *spazio proiettivo n-dimensionale associato allo spazio vettoriale $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$* o *spazio proiettivo n-dimensionale coordinatizzato su \mathbb{K}* .

Generalizzando questo esempio, definiamo su un insieme qualsiasi $\mathcal{P} \neq \emptyset$ una *struttura proiettiva n-dimensionale* come una famiglia $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ soddisfacente alle condizioni (S1'), (S2), (S3), (S4). La coppia $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ viene detta *spazio proiettivo n-dimensionale*.

1.15 Osservazione. *Nella famiglia dei sottospazi di uno spazio proiettivo n-dimensionale, con $n \geq 1$, si può considerare in particolare la sottofamiglia \mathcal{R} delle rette (sottospazi di dimensione 1), caratterizzata dalla proprietà:*

(S₁) *dati comunque due punti distinti di \mathcal{P} , esiste una ed una sola retta di \mathcal{R} che li contenga.*

DIMOSTRAZIONE. Siano infatti $a, b \in \mathcal{P}$, con $a \neq b$ e sia $S_c(a, b)$ il loro sottospazio congiungente. Dalla formula di Grassmann risulta $0+0 = -1+1$, cioè $S_c(a, b)$ è una

certa retta S_1 . Se ora $S'_1 \in \mathcal{R}$ è un'altra retta tale che $a, b \in S'_1$, risulta $S_1 \subseteq S'_1$, pertanto dall'assioma (S2) per gli spazi proiettivi segue che $S_1 = S'_1 =: \overline{a, b}$. ■

Nel caso $n = 2$ si parla di *piano proiettivo*, i cui sottospazi si riducono a quello banale (\emptyset), i singleton dei punti S_0 , le rette S_1 e il sottospazio improprio (S_2 , ossia il piano stesso). Poichè allora gli unici sottospazi significativi sono le rette, possiamo considerare come struttura proiettiva sull'insieme \mathcal{P} dei punti del piano proiettivo l'insieme

$$\mathcal{R} := \{S_1 : S_1 \in \mathcal{S}\}$$

delle rette ed indicare il piano proiettivo con la coppia $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$.

La famiglia \mathcal{R} gode delle seguenti proprietà:

- (P1) dati comunque due punti distinti di \mathcal{P} , esiste una ed una sola retta di \mathcal{R} che li contenga;
- (P2) date comunque due rette distinte di \mathcal{R} , esiste uno ed un solo punto di \mathcal{P} che appartiene ad entrambe;
- (P3) esistono quattro punti distinti di \mathcal{P} , a tre a tre non allineati, il che è equivalente a richiedere che:

$$\forall R \in \mathcal{R} : |R| \geq 3 \quad \text{e} \quad |\mathcal{R}| \geq 2.$$

1.16 Osservazione. *Come per i piani affini, anche per i piani proiettivi e, più in generale, per gli spazi proiettivi n -dimensionali ci si pone la questione sotto quali ipotesi essi siano coordinatizzabili su un campo, o almeno su un corpo (non necessariamente commutativo). Possiamo richiamare i seguenti risultati:*

- (a) *uno spazio proiettivo di dimensione almeno 2 è coordinatizzabile su un corpo (non necessariamente commutativo) se e solo se è verificata in esso la proposizione di Desargues: utilizzando configurazioni di Desargues si può costruire il corpo delle coordinate; viceversa, se lo spazio è ottenuto da uno spazio vettoriale su un corpo, la proposizione di Desargues diviene un teorema (cfr. e.g. [7]);*

- (b) *In dimensione $n \geq 3$ la proposizione di Desargues è automaticamente verificata (si dimostra a partire dagli assiomi di spazio proiettivo), mentre in dimensione 2 non c'è modo di dimostrarla a partire dai soli assiomi di piano proiettivo, dunque:*
- (c) *ogni spazio proiettivo di dimensione maggiore o uguale a 3 è coordinatizzabile su un corpo, mentre esistono piani proiettivi non desarguesiani;*
- (d) *uno spazio proiettivo di dimensione $n \geq 2$ è coordinatizzabile su un campo se e solo se in almeno un piano è verificata la proposizione di Pappo proiettiva (cfr. [7]).*
- (e) *la proposizione di Pappo proiettiva implica la proposizione di Desargues;*
- (f) *nel caso finito, ogni corpo è un campo, quindi le proposizioni di Desargues e di Pappo proiettiva risultano equivalenti.*

1.6 Spazi lineari e semilineari

Generalizzando gli esempi costituiti dai piani affini e proiettivi (in senso astratto), possiamo considerare un insieme $\mathcal{P} \neq \emptyset$ di punti e $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ tale che

(L1) per due punti distinti passa una ed una sola retta di \mathcal{R} ;

(L2) ogni retta contiene almeno due punti.

Otteniamo allora che \mathcal{R} è una struttura di rette o *struttura lineare* su \mathcal{P} , e la coppia $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ è detta *spazio lineare*.

Generalizzando ulteriormente, possiamo chiedere ad \mathcal{R} di soddisfare ad una proprietà più debole di (L1), oltre che ad (L2):

(SL1) per due punti passa al più una retta di \mathcal{R} ;

(SL2) ogni retta contiene almeno due punti.

Allora $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ si chiama *spazio semilineare*. Tra gli spazi lineari vi sono gli spazi affini e proiettivi di dimensione qualsiasi, purchè si selezioni come famiglia di parti

di \mathcal{P} la sola famiglia delle rette, ma anche svariati esempi non proiettivi, nè affini. Tra gli spazi semilineari vi sono tutti gli spazi lineari, i grafi, gli spazi polari, i quadrangoli e i poligoni generalizzati, le geometrie parziali e semiparziali ([4]).

Capitolo 2

Isomorfismi e automorfismi di strutture geometriche

2.1 Isomorfismi

2.1 Definizione. Siano $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ e $(\mathcal{P}', \mathcal{F}')$ due spazi geometrici. Un isomorfismo di strutture geometriche o isomorfismo geometrico è un'applicazione bijectiva $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ tale che

$$\forall X \in \mathfrak{P}(\mathcal{P}) : X \in \mathcal{F} \iff f(X) \in \mathcal{F}'.$$

Con la Definizione precedente chiediamo che f ed f^{-1} conservino le strutture geometriche.

2.2 Definizione. Siano $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ e $(\mathcal{P}', \mathcal{F}')$ due spazi geometrici. Diciamo che $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ e $(\mathcal{P}', \mathcal{F}')$ sono isomorfi se esiste un isomorfismo geometrico $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ tra le due strutture \mathcal{F} e \mathcal{F}' .

In tal caso scriveremo $(\mathcal{P}, \mathcal{F}) \simeq (\mathcal{P}', \mathcal{F}')$.

Si verifica subito che la relazione \simeq introdotta nella Definizione (2.1) è di equivalenza.

Riprendiamo ora gli esempi di spazi geometrici presentati nel precedente capitolo per individuare quelle applicazioni bijecttive fra essi definite che sono anche isomorfismi geometrici.

2.1.1 Omeomorfismi tra spazi topologici

Richiamiamo la nozione di funzione continua tra spazi topologici, citando, tra le diverse definizioni equivalenti che si trovano in letteratura, quella che risulta più semplice e direttamente collegata con la topologia, che, come abbiamo visto, costituisce la struttura geometrica di uno spazio topologico.

2.3 Definizione. *Siano (X, τ) ed (X', τ') due spazi topologici. Un'applicazione $f : X \rightarrow X'$ è continua se, e solo se, per ogni $A' \in \tau'$ risulta $f^{-1}(A') \in \tau$.*

Facciamo notare che un'applicazione continua e bigettiva tra due spazi topologici in generale può avere inversa non continua. Per ottenere isomorfismi geometrici è quindi necessario richiedere espressamente la continuità dell'inversa:

2.4 Definizione. *Siano (X, τ) ed (X', τ') due spazi topologici. Diciamo che una applicazione $f : X \rightarrow X'$ bigettiva è un omeomorfismo se f e f^{-1} sono applicazioni continue.*

Allora gli isomorfismi geometrici tra (X, τ) e (X', τ') sono tutti e soli gli omeomorfismi.

2.1.2 Isometrie

2.5 Definizione. *Siano (X, d) e (X', d') due spazi metrici. Una isometria è un'applicazione $\mu : X \rightarrow X'$ tale che*

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = d'(\mu(x), \mu(y)).$$

2.6 Osservazione. *Un'isometria è necessariamente iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo due spazi metrici (X, d) e (X', d') e un'isometria $\mu : X \rightarrow X'$. Siano $x, y \in X$ tali che $x \neq y$. Allora $d(x, y) > 0$. Pertanto $d'(\mu(x), \mu(y)) = d(x, y) > 0$, ossia $\mu(x) \neq \mu(y)$. ■

2.7 Osservazione. Siano (X, d) e (X', d') due spazi metrici e $\mu : X \rightarrow X'$ un'isometria suriettiva (dunque bijectiva). Allora anche μ^{-1} è un'isometria.

DIMOSTRAZIONE. Siano $x', y' \in X'$. Allora

$$d'(x', y') = d'(\mu(x), \mu(y)) = d(x, y) = d(\mu^{-1}(x'), \mu^{-1}(y')),$$

da cui segue la tesi. ■

2.8 Osservazione. Siano (X, d) e (X', d') due spazi metrici e $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ le due famiglie di palle aperte rispettivamente. Se ora μ è un'isometria bijectiva da X in X' , risulta immediatamente che per ogni $B(x, r) \in \mathcal{B}$, $\mu(B(x, r)) = B(\mu(x), r) \in \mathcal{B}'$, e lo stesso vale per μ^{-1} . In particolare, possiamo affermare che un'isometria bijectiva è un isomorfismo geometrico che conserva i raggi delle palle.

Problema. Si può affermare che, viceversa, ogni isomorfismo geometrico tra due spazi metrici è un'isometria? (Si troverà una risposta a questa domanda più avanti, nel Cap. 6 (cfr. (3.6)).

2.1.3 Affinità

2.9 Definizione. Siano $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ e $(\mathcal{A}', \mathcal{R}')$ due piani affini. Un isomorfismo geometrico $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ si chiama affinità o collineazione.

2.10 Osservazione. Siano $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ e $(\mathcal{A}', \mathcal{R}')$ due piani affini e $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un'applicazione bijectiva. Allora la condizione

$$\forall R \subseteq \mathcal{A} : R \in \mathcal{R} \implies f(R) \in \mathcal{R}'$$

è sufficiente per definire un'affinità tra $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ e $(\mathcal{A}', \mathcal{R}')$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione sfrutta il fatto che ogni retta R è univocamente determinata da due suoi punti distinti.

Dimostriamo che anche f^{-1} manda rette in rette per ottenere la tesi. Siano $R' \in \mathcal{R}'$ e $a', b' \in R'$ con $a' \neq b'$. Allora possiamo osservare che $R' = \overline{a', b'}$. Poichè f è per

ipotesi bigettiva, esistono $a, b \in \mathcal{A}$ tali che $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ e $a \neq b$. Consideriamo la retta $R = \overline{a, b}$. Si ha che $f(R) = f(\overline{a, b}) = \overline{a', b'} = R'$, da cui $f^{-1}(R') = f^{-1}(f(R)) = R \in \mathcal{R}$. ■

2.11 Osservazione. *Ogni affinità muta rette parallele in rette parallele.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un'affinità e $R, S \in \mathcal{R}$ con $R \parallel S$. Supponiamo per assurdo che $f(R) \cap f(S) \neq \emptyset$. Allora sia $\{p\} = f(R) \cap f(S)$. Segue che $f^{-1}(p) \in R \cap S$, il che è in contraddizione con l'ipotesi su R ed S . Pertanto $f(R) \parallel f(S)$. ■

2.1.4 Applicazioni semilineari bigettive tra spazi vettoriali

Consideriamo ora due spazi vettoriali (V, Σ) e (V', Σ') non necessariamente sullo stesso campo.

2.12 Definizione. *Definiamo isomorfismo geometrico tra spazi vettoriali un'applicazione bigettiva $f : V \rightarrow V'$ tale che f e f^{-1} mutino sottospazi vettoriali in sottospazi vettoriali.*

2.13 Osservazione. *Siano $(V(\mathbb{K}), \Sigma)$ e $(V'(\mathbb{K}), \Sigma')$ due spazi vettoriali sullo stesso campo \mathbb{K} e $f : V \rightarrow V'$ un isomorfismo vettoriale, cioè un'applicazione lineare e bigettiva. Poichè f mantiene indipendenza e dipendenza lineare di insiemi di vettori, essa muta sottospazi in sottospazi vettoriali (dello stesso rango); in particolare, poichè V e V' sono isomorfi (come spazi vettoriali), risulta che*

$$\text{rg}(V) = \text{rg}(V').$$

Dunque ogni isomorfismo vettoriale (i.e. lineare) è un isomorfismo geometrico.

In generale non è vero il viceversa: si può infatti considerare una classe più ampia di applicazioni bigettive tra spazi vettoriali, che risultano essere isomorfismi della struttura geometrica e contenere come caso particolare gli isomorfismi vettoriali. Introduciamo a tal proposito la seguente definizione:

2.14 Definizione. Siano $(V(\mathbb{K}), \Sigma)$, $(V'(\mathbb{K}'), \Sigma')$ due spazi vettoriali geometrici. Un'applicazione $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(\mathbb{K}')$ si dice *semilineare* se esiste un isomorfismo $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ tale che per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V(\mathbb{K})$ e per ogni $k \in \mathbb{K}$ risulti

$$(a) \quad f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2);$$

$$(b) \quad f(k\mathbf{v}) = k^\alpha f(\mathbf{v})^1.$$

Si noti che se, in particolare $\mathbb{K} = \mathbb{K}'$ ed $\alpha = id_{\mathbb{K}}$, l'applicazione f risulta lineare. Diversamente, chiameremo f *applicazione semilineare propria*.

Si verifica immediatamente che ogni applicazione semilineare bijectiva (*isomorfismo semilineare*) fra due spazi vettoriali (su campi isomorfi) è un isomorfismo geometrico. Viceversa, si può dimostrare che vale il seguente

2.15 Teorema. Siano $(V(\mathbb{K}), \Sigma)$, $(V'(\mathbb{K}'), \Sigma')$ due spazi vettoriali geometrici di rango ≥ 3 . Allora ogni isomorfismo geometrico tra i suddetti spazi vettoriali è un'applicazione semilineare bijectiva $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(\mathbb{K}')$.

La dimostrazione del teorema (2.15) è, sotto certi aspetti, analoga a quella del teorema (2.38) che vedremo nella prossima Sezione (2.2). Si noti però che il teorema (2.15) vale per spazi vettoriali di rango anche infinito. Per la nozione di *rango*, o *dimensione*, di uno spazio vettoriale non finitamente generato, si veda per esempio [1], oppure anche [3], nel quale si può trovare una dimostrazione del teorema (2.15).

2.1.5 Collineazioni tra spazi proiettivi

2.16 Definizione. Siano $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ e $(\mathcal{P}', \mathcal{S}')$ due spazi proiettivi rispettivamente m - ed n -dimensionali. Chiamiamo *isomorfismo geometrico* (tra spazi proiettivi) un'applicazione $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ bijectiva tale che f ed f^{-1} mutino sottospazi proiettivi in sottospazi proiettivi della stessa dimensione.

Si noti che da questa definizione segue in particolare che se due spazi proiettivi di dimensioni m ed n sono isomorfi, allora necessariamente hanno la stessa dimensione $m = n$.

¹Usiamo qui la notazione esponenziale riferita all'azione dell'isomorfismo di campi $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$: dunque, per $k \in \mathbb{K}$, denoteremo con $k^\alpha \in \mathbb{K}'$ l'immagine di k attraverso α .

Ci occupiamo ora di caratterizzare opportunamente gli isomorfismi geometrici tra spazi proiettivi, considerando dapprima il caso di due spazi proiettivi ($\mathcal{P} = PG(V), \Sigma$) e ($\mathcal{P}' = PG(V'), \Sigma'$) associati rispettivamente agli spazi vettoriali $V(\mathbb{K})$ e $V'(\mathbb{K}')$: possiamo allora ricondurci alle considerazioni appena fatte per gli spazi vettoriali stessi. A tale scopo premettiamo la seguente definizione:

2.17 Definizione. *Se $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(\mathbb{K}')$ è un'applicazione semilineare (con isomorfismo associato $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$), diciamo che l'applicazione*

$$\varphi : \begin{cases} PG(V) & \longrightarrow & PG(V') \\ p = \langle \mathbf{v} \rangle & \longmapsto & \varphi(p) := \langle f(\mathbf{v}) \rangle \end{cases}$$

è l' applicazione indotta da f sugli spazi proiettivi.

Si osservi che φ è ben definita, poichè se si sostituisce il vettore \mathbf{v} , che rappresenta (o genera) il punto $p = \langle \mathbf{v} \rangle$, con un vettore $k\mathbf{v}$ ($k \in \mathbb{K}^*$), si ottiene

$$\varphi(p) = \langle f(k\mathbf{v}) \rangle = \langle k^\alpha f(\mathbf{v}) \rangle = \langle f(\mathbf{v}) \rangle$$

. Abbiamo visto che le applicazioni semilineari bigettive sono (tutti e soli gli, se il rango è ≥ 3) isomorfismi geometrici tra spazi vettoriali (cioè, conservano i sottospazi in entrambe le direzioni), così risulta immediatamente che esse *inducono isomorfismi geometrici tra i corrispondenti spazi proiettivi*.

Viceversa, si può dimostrare il seguente teorema, che altro non è che la riformulazione del teorema (2.15) in termini proiettivi:

2.18 Teorema. *Ogni isomorfismo geometrico $\varphi : PG(V) \rightarrow PG(V')$ tra due spazi proiettivi di dimensione ≥ 2 , associati a due spazi vettoriali $V(\mathbb{K})$ e $V'(\mathbb{K}')$, è indotto da un isomorfismo semilineare $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(\mathbb{K}')$.*

Avremo, in particolare, quegli isomorfismi geometrici che sono indotti da isomorfismi lineari degli spazi vettoriali:

2.19 Definizione. *Chiamiamo proiettività $\pi : PG(V) \rightarrow PG(V')$ un isomorfismo geometrico tra due spazi proiettivi indotto da un'applicazione lineare bigettiva $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(\mathbb{K}')$ tra i corrispondenti spazi vettoriali.*

Chiamiamo proiettività semilineare un isomorfismo indotto da un'applicazione bigettiva semilineare propria (cioè, tale che $\alpha \neq id$) $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V'(\mathbb{K}')$.

Per trovare, anche nel caso generale, una buona caratterizzazione degli isomorfismi geometrici tra spazi proiettivi n -dimensionali astratti, cominciamo col caratterizzare i sottospazi proiettivi per mezzo delle sole nozioni di punto, retta ed incidenza.

D'ora in poi, indichiamo con $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ uno spazio proiettivo n -dimensionale.

2.20 Definizione. Per ogni $S \subseteq \mathcal{P}$, poniamo

$$\bar{S} := \bigcap \{T : T \in \mathcal{S}, S \subseteq T\}.$$

Chiamiamo \bar{S} chiusura di S .

2.21 Osservazione. Siano $S, S' \in \mathfrak{P}(\mathcal{P})$. Valgono allora le seguenti proprietà:

- (a) $S \subseteq \bar{S} \in \mathcal{S}$, anzi \bar{S} è il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene S ;
 $S \in \mathcal{S}$ se, e solo se, $\bar{S} = S$;
- (b) $\overline{\bar{S}} = \bar{S}$;
- (c) se $S \subseteq S'$, allora $\bar{S} \subseteq \bar{S}'$;
- (d) se $S, S' \in \mathcal{S}$, lo spazio congiungente di S ed S' è dato da $S_c = \overline{S \cup S'}$
- (e) se $a, b \in \mathcal{P}$, con $a \neq b$, allora $\overline{a, b} = \overline{\{a, b\}}$ (cfr. osservazione (1.15)).

Da (2.21, c, e) segue immediatamente :

2.22 Lemma. Sia $S \in \mathfrak{P}(\mathcal{P})$. Se $S \in \mathcal{S}$. Allora

$$\forall a, b \in S, a \neq b \implies \overline{a, b} \subseteq S.$$

2.23 Teorema. Siano $S_h \in \mathcal{S}$ e $p \in \mathcal{P}$. Allora

$$\overline{S_h \cup \{p\}} = \bigcup \{\overline{p, x} : x \in S_h\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $p \in S_h$. Allora $S_0 := \{p\} = \{p\} \cap S_h$ e $\dim(S_0) = 0$. Dalla formula di Grassmann si ha che la dimensione del sottospazio congiungente S_0 con S_h è h , allora lo spazio congiungente è S_h stesso, quindi $\overline{\{p\} \cup S_h} = S_h$.

Consideriamo ora un generico $x \in S_h$. Per il lemma (2.22) si ha $\overline{p, x} \subseteq S_h$ in quanto anche $p \in S_h$. Pertanto $\bigcup \{\overline{p, x} : x \in S_h\} \subseteq S_h$. Verifichiamo l'inclusione opposta. Sia $y \in S_h$. Allora banalmente $y \in \overline{p, y} \subseteq \bigcup \{\overline{p, x} : x \in S_h\}$, da cui la tesi nel caso in cui $p \in S_h$.

Supponiamo ora che $p \notin S_h$. Allora $\dim(\{p\} \cap S_h) = \dim(\emptyset) = -1$. Dalla formula di Grassmann la dimensione del sottospazio congiungente risulta $c = 0 + h - (-1) = h + 1$, pertanto $\overline{\{p\} \cup S_h} = S_{h+1}$.

Consideriamo ora un $x \in S_h$. Allora $x \in S_{h+1}$. Dal fatto che $p \in S_{h+1}$, per il lemma (2.22) si ha $\overline{p, x} \subseteq S_{h+1}$, pertanto $\bigcup \{\overline{p, x} : x \in S_h\} \subseteq S_{h+1}$. Verifichiamo l'inclusione opposta. Sia $y \in S_{h+1}$. Allora $\dim(\overline{p, y} \cap S_h) = 1 + h - (h + 1) = 0$, pertanto $\overline{p, y} \cap S_h$ è un punto. Sia quindi $\{z\} = \overline{p, y} \cap S_h$. Segue che $y \in \overline{p, z} \subseteq \bigcup \{\overline{p, x} : x \in S_h\}$, da cui $S_{h+1} \subseteq \bigcup \{\overline{p, x} : x \in S_h\}$. ■

2.24 Corollario. *Sia $S \in \mathfrak{P}(\mathcal{P})$. Supponiamo che per ogni $a, b \in S$ con $a \neq b$ si abbia $\overline{a, b} \subseteq S$. Allora $S \in \mathcal{S}$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $|S| = 0$ o se $|S| = 1$ la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi che $|S| \geq 2$. Ci basta dimostrare che $S = \overline{S}$.

Poniamo $\overline{S} = S_h \in \mathcal{S}$ (per l'osservazione (2.21)). Dimostriamo per induzione su j ($-1 \leq j \leq h$) il seguente fatto:

$$\forall j = -1, \dots, h, \exists S_j \in \mathcal{S} : S_j \subseteq S. \quad (2.1)$$

Per $j = -1$, $S_{-1} = \emptyset \subseteq S$. Per $j = 0$, basta considerare un punto $a \in S$, allora $S_0 = \{a\} \subseteq S$. Supponiamo che la proprietà sia vera per $j < h$, e sia $S_j \in \mathcal{S}$ tale che $S_j \subseteq S$. Notiamo che $S_j \subsetneq S$. Infatti, se per assurdo $S_j = S$, ricordando l'osservazione (2.21), si avrebbe $S_j = \overline{S_j} = \overline{S} = S_h$, da cui $h = j$ che è in contraddizione con l'assunto $j < h$. Pertanto esiste un $p \in S \setminus S_j$. Ricordando

il teorema (2.23) e l'ipotesi, si trova

$$S_{j+1} = \overline{\{p\} \cup S_j} = \bigcup_{\subseteq S} \underbrace{\overline{p, x}}_{\subseteq S} : x \in S_j \subseteq S,$$

dunque la proprietà (2.1) è valida anche per $j + 1$ e, per induzione, $\exists S'_h$ tale che $S'_h \subseteq S \subseteq \overline{S} = S_h$ e ricordando la proprietà (S2) degli spazi proiettivi si ha $S'_h = S = S_h = \overline{S} \in \mathcal{S}$, da cui la tesi. ■

Possiamo enunciare ora il seguente teorema, che fornisce una completa caratterizzazione dei sottospazi tra tutti i sottoinsiemi di uno spazio proiettivo:

2.25 Teorema. *Siano $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ uno spazio proiettivo n -dimensionale e $S \in \mathfrak{P}(\mathcal{P})$. Allora sono fatti equivalenti:*

- (a) $S \in \mathcal{S}$;
- (b) per ogni $a, b \in S$ tali che $a \neq b$, risulta $\overline{a, b} \subseteq S$.

DIMOSTRAZIONE.

(a) \implies (b). E' il lemma (2.22).

(b) \implies (a). E' il corollario (2.24). ■

I teoremi (2.23) e (2.25) individuano due proprietà fondamentali e caratterizzanti per i sottospazi proiettivi; in più, il teorema (2.23) permette di fornire una importante caratterizzazione degli isomorfismi geometrici tra due spazi proiettivi n -dimensionali che si basa solo sulle nozioni di punto, retta ed incidenza. Premettiamo la seguente

2.26 Definizione. *Siano $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ e $(\mathcal{P}', \mathcal{S}')$ due spazi proiettivi. Chiamiamo collineazione una bijezione $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ che muta rette in rette.*

Si può allora provare il seguente

2.27 Teorema. *Gli isomorfismi geometrici tra due spazi proiettivi $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ e $(\mathcal{P}', \mathcal{S}')$ sono tutte e sole le collineazioni.*

DIMOSTRAZIONE. Risulta per definizione che ogni isomorfismo geometrico muta sottospazi in sottospazi della stessa dimensione, quindi muta rette in rette. Viceversa, sia $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ una bijezione che muta rette in rette. Come visto per i piani affini, segue subito che anche f^{-1} muta rette in rette, quindi ci concentriamo solo su f e dimostriamo che f muta sottospazi in sottospazi della stessa dimensione.

Procediamo per induzione su $j \leq n = \dim(\mathcal{P})$. Se $j = -1$, allora $f(S_{-1}) = f(\emptyset) = \emptyset = S'_{-1}$. Inoltre per $j = 0$, se $S_0 = \{a\}$, $f(S_0) = f(\{a\}) = \{a'\} = S'_0$. Supponiamo che f conservi la dimensione dei sottospazi S_j per un $j < n$, ossia $f(S_j) = S'_j$ per ogni S_j con una fissata dimensione $j < n$. Sia quindi $S_{j+1} \in \mathcal{S}$: come si è già visto nella dimostrazione di (2.24), esisterà allora $S_j \subseteq S_{j+1}$ e $x \in S_{j+1} \setminus S_j$ tale che $S_{j+1} = \overline{\{x\} \cup S_j} = \bigcup \{\overline{x, y} : y \in S_j\}$. Allora

$$f(S_{j+1}) = f\left(\bigcup \{\overline{x, y} : y \in S_j\}\right) = \bigcup \left\{ \overline{f(x), f(y)} : f(y) \in f(S_j) = S'_j \right\} = \overline{\{f(x)\} \cup S'_j} = S'_{j+1}$$

■

2.2 Automorfismi: Gruppo strutturale di uno spazio geometrico

2.28 Definizione. Chiamiamo gruppo strutturale di uno spazio geometrico $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ il gruppo degli automorfismi geometrici di $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$, e lo indichiamo con $\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{F})$.

Studiare la *geometria* di uno spazio geometrico $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ significa studiarne le proprietà invarianti per il suo gruppo strutturale.

2.29 Definizione. Diciamo che due spazi geometrici sullo stesso supporto $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ e $(\mathcal{P}, \mathcal{F}')$ sono equivalenti se hanno lo stesso gruppo strutturale, cioè scriveremo $(\mathcal{P}, \mathcal{F}) \cong (\mathcal{P}, \mathcal{F}')$ se risulta $\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{F}) = \text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{F}')$.

2.30 Esempio. Se $\mathcal{F}' = \{\mathcal{P} \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ allora $(\mathcal{P}, \mathcal{F}')$ viene detto lo spazio geometrico complementare di $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$, e risulta immediatamente $(\mathcal{P}, \mathcal{F}) \cong (\mathcal{P}, \mathcal{F}')$.

Se in particolare prendiamo $(\mathcal{P}, \mathcal{F}) = (X, \tau)$ spazio topologico, avremo $\mathcal{F}' = \mathcal{C}$ essendo \mathcal{C} la famiglia dei chiusi. Allora $(X, \mathcal{C}) \cong (X, \tau)$.

2.2.1 Piano affine su un campo

Sia \mathbb{K} un campo e sia $\mathbb{A}_2(\mathbb{K}) = (\mathcal{A} = \mathbb{K}^2, \mathcal{R})$, piano affine su \mathbb{K} . Indichiamo con $\text{Aff}(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ il gruppo delle affinità $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. In questo caso dunque risulta $\text{Aut}(\mathcal{A}, \mathcal{R}) = \text{Aff}(\mathcal{A}, \mathcal{R})$.

2.31 Definizione. Una affinità lineare di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ è un'applicazione $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ per cui esistono $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K}$ ($i = 1, 2$) tali che $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ e per ogni $(x, y) \in \mathcal{A}$, $f(x, y) = (x', y')$ dove

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}.$$

Se poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

possiamo anche scrivere

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Allora vediamo f come composizione: $f = \tau_{\mathbf{c}} \circ L_A$, dove $\tau_{\mathbf{c}}$ è la traslazione di vettore $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^t$ ed L_A è l'applicazione lineare bijectiva (automorfismo vettoriale) di \mathbb{K}^2 in \mathbb{K}^2 rappresentata dalla matrice A , non singolare per ipotesi.

Si verifica subito che $\tau_{\mathbf{c}} \circ L_A = L_A \circ \tau_{\mathbf{d}}$ dove $\mathbf{d} = A^{-1}\mathbf{c}$. Da ciò si deduce che il prodotto di affinità lineari è ancora un'affinità lineare. Anche l'inversa di un'affinità lineare è un'affinità lineare. Inoltre risulta immediato che Id è un'affinità lineare. Pertanto le affinità lineari formano un gruppo che indichiamo con $\text{AL}_2(\mathbb{K})$, o $\text{AL}(2, \mathbb{K})$.

2.32 Osservazione. Le affinità lineari mutano rette in rette, dunque sono affinità di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$, e fra queste le traslazioni mutano rette in rette parallele.

Infatti siano $R = \mathbf{a} + \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{R}$ ed $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ un'affinità lineare.

$$f(R) = \tau_{\mathbf{c}}(L_A(R)) = \tau_{\mathbf{c}}(L_A(\mathbf{a}) + L_A(\langle \mathbf{x} \rangle)) = \tau_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}' + \langle \mathbf{x}' \rangle) =$$

$$= \mathbf{a}' + \langle \mathbf{x}' \rangle + \mathbf{c} = (\mathbf{a}' + \mathbf{c}) + \langle \mathbf{x}' \rangle := R',$$

dove $\mathbf{a}' = L_A(\mathbf{a})$ e $\mathbf{x}' = L_A(\mathbf{x})$.

Da qui segue, in particolare, che la traslazione $\tau_{\mathbf{c}}$ muta la retta $\mathbf{a}' + \langle \mathbf{x}' \rangle$ nella retta parallela $(\mathbf{a}' + \mathbf{c}) + \langle \mathbf{x}' \rangle$ e che f muta la retta R nella retta R' . Possiamo pertanto concludere che $\text{AL}_2(\mathbb{K}) \leq \text{Aff}(\mathcal{A}, \mathcal{R})$.

2.33 Definizione. Una affinità semilineare è un'applicazione $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ per cui esistono $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K}$ ($i = 1, 2$) con $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ e $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ tali che per ogni $(x, y) \in \mathcal{A}$ si ha che $s(x, y) = (x', y')$ dati da

$$\begin{cases} x' &= a_1 x^\alpha + b_1 y^\alpha + c_1 \\ y' &= a_2 x^\alpha + b_2 y^\alpha + c_2 \end{cases}$$

Osserviamo che $s = \tau_{\mathbf{c}} \circ L_A \circ \lambda_\alpha$, dove

$$\lambda_\alpha : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x^\alpha, y^\alpha) \end{cases}.$$

Con abuso di notazione scriveremo, per un generico vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^2$, $\lambda_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\alpha$.

Si dimostra che

$$\tau_{\mathbf{c}} \circ L_A \circ \lambda_\alpha = \tau_{\mathbf{c}} \circ \lambda_\alpha \circ L_{A^{\alpha^{-1}}},$$

essendo

$$A^\alpha := \begin{pmatrix} a_1^\alpha & b_1^\alpha \\ a_2^\alpha & b_2^\alpha \end{pmatrix}.$$

Come prima, ne deduciamo che le affinità semilineari formano un gruppo che indichiamo con $\text{A}\Gamma\text{L}_2(\mathbb{K})$.

2.34 Osservazione. Le affinità semilineari mutano rette in rette.

Infatti, da $R = \mathbf{a} + \langle \mathbf{x} \rangle \in \mathcal{R}$ si ricava

$$\lambda_\alpha(R) = \lambda_\alpha(\mathbf{a} + \langle \mathbf{x} \rangle) = \mathbf{a}^\alpha + \langle \mathbf{x}^\alpha \rangle \in \mathcal{R}.$$

Allora abbiamo

$$\text{AL}_2(\mathbb{K}) \leq \text{A}\Gamma\text{L}_2(\mathbb{K}) \leq \text{Aff}(\mathcal{A}, \mathcal{R}).$$

Vogliamo dimostrare che le affinità di $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ sono tutte e sole le affinità semilineari.

A tale scopo, si consideri in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ il riferimento affine con origine $\mathbf{0} = (0, 0)$ e base $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

2.35 Lemma. *Sia $F \in \text{Aff}(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ tale che $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ e $F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$. Allora esiste un $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ tale che $F = \lambda_\alpha$.*

DIMOSTRAZIONE. Dall'ipotesi segue che F fissa le seguenti rette:

$$R_x := \overline{\mathbf{e}_1, \mathbf{0}}, \quad R_y := \overline{\mathbf{e}_2, \mathbf{0}}, \quad R_1 := \overline{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}.$$

Sia $R : x + y = c$ parallela alla retta $\overline{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}$. Poichè F manda rette parallele in rette parallele, consideriamo l'applicazione bigettiva

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ c & \longmapsto & c' \end{cases}$$

che associa al c della retta R lo scalare c' della retta $F(R) = R'$, essendo $R' : x + y = c'$ e dimostriamo che $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{K})$.

1. Siano $a, b \in \mathbb{K}$ e dimostriamo che $(a + b)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$. Consideriamo la retta $R_{a+b} : x + y = a + b$. Se dal punto (a, b) della retta R_{a+b} si tracciano le rette parallele agli assi, vengono individuati i punti $(a, 0)$ e $(0, b)$ rispettivamente sull'asse x e sull'asse y . Dato che $(a, 0)$ è intersezione della retta $R_a : x + y = a$ con l'asse x e che, per definizione, $F(R_a) = R_{a^\alpha}$ dove $R_{a^\alpha} : x + y = a^\alpha$, si ha che $F(a, 0) = (a^\alpha, 0)$ e, analogamente, anche $F(0, b) = (0, b^\alpha)$. A loro volta i punti $(a^\alpha, 0)$ e $(0, b^\alpha)$ individuano il punto (a^α, b^α) (se si mandano le rette parallele agli assi R_x e R_y), e quindi risulta $F(a, b) = (a^\alpha, b^\alpha)$, che appartiene sia alla retta di equazione $x + y = a^\alpha + b^\alpha$ che alla retta $F(R_{a+b}) = R_{(a+b)^\alpha}$, dove $R_{(a+b)^\alpha} : x + y = (a + b)^\alpha$, entrambe parallele alla retta R_1 ; ne segue che $(a + b)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$.

2. Siano ancora $a, b \in \mathbb{K}$. Consideriamo i punti (a, ab) e $(1, b)$ entrambi appartenenti alla retta $y = bx$. Si ha allora che $F(1, b) = (1, b^\alpha)$ e $F(a, ab) = (a^\alpha, (ab)^\alpha)$ appartengono alla stessa retta per $\mathbf{0}$ di equazione $y = b^\alpha x$. Poichè $(a^\alpha, (ab)^\alpha)$ appartiene alla retta $y = b^\alpha x$, segue che $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$. ■

2.36 Lemma. *Dati tre punti non allineati $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ e $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ esiste una ed una sola affinità lineare f di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{b}$ e $f(\mathbf{0}) = \mathbf{c}$.*

DIMOSTRAZIONE. Occorre e basta porre $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tale che $f(x, y) = (x', y')$ dove

$$\begin{cases} x' &= (a_1 - c_1)x + (b_1 - c_1)y + c_1 \\ y' &= (a_2 - c_2)x + (b_2 - c_2)y + c_2 \end{cases}$$

ed in tal modo le condizioni richieste sono verificate; inoltre una f che soddisfi le condizioni richieste dall'ipotesi risulta univocamente determinata e definita come sopra. ■

2.37 Lemma. *Date due terne di punti non allineati di $\mathbb{A}_2(\mathbb{K})$, esiste una ed una sola affinità lineare che muta ordinatamente l'una nell'altra.*

DIMOSTRAZIONE. Tenendo conto del Lemma (2.36), la tesi segue per composizione. ■

Possiamo ora dimostrare il Teorema fondamentale delle affinità.

2.38 Teorema (fondamentale). *Risulta che $Aff(\mathcal{A}, \mathcal{R}) = \text{AFL}_2(\mathbb{K})$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F \in Aff(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ un' affinità. Dimostriamo che F è un' affinità semilineare. Siano $\mathbf{a} = F(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{b} = F(\mathbf{e}_2)$ e $\mathbf{c} = F(\mathbf{0})$; poichè $\mathbf{0}$, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 non sono allineati e F è un automorfismo geometrico, allora \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} non sono allineati. Per il Lemma (2.36) esiste una ed una sola $f \in \text{AL}_2(\mathbb{K})$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{b}$ e $f(\mathbf{0}) = \mathbf{c}$. Allora $(f^{-1} \circ F)$ è un' affinità che fissa $\mathbf{0}$, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 . Deduciamo dal Lemma (2.35) che esiste un $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ tale che $(f^{-1} \circ F) = \lambda_\alpha$ e quindi $F = f \circ \lambda_\alpha$. Allora $F \in \text{AFL}_2(\mathbb{K})$. Dall'Osservazione (2.34) sappiamo già che $\text{AFL}_2(\mathbb{K}) \leq Aff(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ e dunque la tesi. ■

Generalizzando, consideriamo $\mathbb{A}_n(\mathcal{A}, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n, \mathcal{R})$, con $n \geq 2$. Allora ogni affinità geometrica è un' affinità semilineare dello spazio affine $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ e quindi $\text{AFL}_n(\mathbb{K}) = Aff(\mathbb{K}^n, \mathcal{R})$.

2.2.2 Spazi vettoriali

Sia $(V(\mathbb{K}), \Sigma)$ uno spazio vettoriale geometrico di rango $n \geq 3$. Per il Teorema (2.15) si può affermare che gli automorfismi geometrici dello spazio vettoriale sono tutte e sole le trasformazioni semilineari bigettive $f : V(\mathbb{K}) \rightarrow V(\mathbb{K})$, che chiameremo anche *automorfismi semilineari di $V(\mathbb{K})$* . Gli automorfismi semilineari di $V(\mathbb{K})$ formano un gruppo, che denoteremo con $\Gamma L(V)$.

Dunque, se il campo \mathbb{K} ammette automorfismi non banali, esistono automorfismi geometrici di $(V(\mathbb{K}), \Sigma)$ che non sono lineari. Per gli spazi vettoriali su campi che non ammettono automorfismi non banali, che si dicono *staudtiani*², risulta che ogni automorfismo geometrico dello spazio vettoriale è anche un automorfismo vettoriale, i.e. lineare.

Ricordiamo che gli automorfismi (lineari) dello spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ formano un gruppo, che si denota con $GL(V) \leq \Gamma L(V)$ e si chiama *gruppo generale lineare su V* .

Se $V = V_n(\mathbb{K})$ è di dimensione finita, per ogni scelta di una base in V resta determinato un isomorfismo di $GL(V)$ nel gruppo $GL_n(\mathbb{K})$ delle matrici quadrate invertibili di ordine n a coefficienti nel campo \mathbb{K} , dunque possiamo scrivere $GL(V_n(\mathbb{K})) \cong GL_n(\mathbb{K})$.

Al variare della base in $V = V_n(\mathbb{K})$ la matrice della rappresentazione scalare di un dato automorfismo f di V descrive in $GL_n(\mathbb{K})$ una classe completa di coniugio di matrici *simili*, aventi tutte lo stesso determinante e la stessa traccia, che quindi non dipendono dalla base scelta ma solo dall'automorfismo f : essi si chiamano rispettivamente *determinante* e *traccia* di f . Gli automorfismi con determinante uguale ad 1 formano il sottogruppo $SL(V) \leq GL(V)$ che si chiama *gruppo speciale lineare*. E' chiaro che $SL(V) \cong SL_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$, con

$$SL_n(\mathbb{K}) := \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : \det A = 1\}.$$

2.39 Esercizio. *Provare che $SL_n(\mathbb{K}) \triangleleft GL_n(\mathbb{K})$. (Suggerimento: l'applicazione $\det : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$; $A \mapsto \det A$ è un epimorfismo di gruppi con nucleo...).*

²Esempi: \mathbb{F}_p per ogni p primo, \mathbb{Q} e \mathbb{R} .

2.40 Esercizio. *Provare che $GL(V) \triangleleft \Gamma L(V)$. (Suggerimento: l'applicazione $\Gamma L(V) \rightarrow \text{Aut } \mathbb{K}$; $f \mapsto \alpha$, con α automorfismo del campo associato ad f , è un epimorfismo di gruppi, con nucleo...).*

2.2.3 Spazi proiettivi

Consideriamo dapprima il caso di uno spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale $(\mathcal{P} = PG(V), \Sigma)$, i cui automorfismi, se la dimensione dello spazio è ≥ 2 , sono indotti dagli automorfismi semilineari dello spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$. Indichiamo con $P\Gamma L(V)$ il gruppo delle proiettività semilineari e lineari di $PG(V)$, e con $PGL(V)$ il sottogruppo delle proiettività (lineari): si può allora provare che $PGL(V) \triangleleft P\Gamma L(V)$.

Se poi $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$, risulta $PGL(V) \cong PGL_{n+1}(\mathbb{K}) = GL_{n+1}(\mathbb{K})/Z(GL_{n+1}(\mathbb{K}))$, dove $Z(GL_{n+1}(\mathbb{K}))$ è il centro di $GL_{n+1}(\mathbb{K})$, costituito dal sottogruppo moltiplicativo delle matrici scalari.

Consideriamo ora il caso generale di uno spazio proiettivo n -dimensionale $(\mathcal{P}, \mathcal{S})$. Sia $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ la famiglia delle rette. Per il Teorema (2.27) si ha che $\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ e quindi $(\mathcal{P}, \mathcal{S}) \cong (\mathcal{P}, \mathcal{R})$.

Prendiamo in esame in particolare lo spazio proiettivo 3-dimensionale, che indicheremo con $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_3(\mathcal{P}, \mathcal{S})$.

2.41 Proposizione. *In \mathbb{P}_3 tutti i piani sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $S_2, S'_2 \in \mathcal{S}$ con $S_2 \neq S'_2$ e $p \in \mathcal{P} \setminus (S_2 \cup S'_2)$. Risulta che S_2 ed S'_2 si intersecano in una retta per (S4). Consideriamo la prospettività di centro p

$$\pi_p : \begin{cases} S_2 & \longrightarrow & S'_2 \\ x & \longmapsto & x' := S'_2 \cap \overline{p, x} \end{cases} .$$

Si verifica che π_p è un'applicazione bijectiva (in cui, in particolare, restano fissati tutti i punti della retta comune ai due piani). Per ogni $x, y \in S_2$ con $y \neq x$ si ha che $\pi_p(\overline{x, y}) = \widehat{S}_2 \cap S'_2$, dove \widehat{S}_2 è il piano individuato da p e da $\overline{x, y}$. Osserviamo che $\widehat{S}_2 \neq S'_2$ perchè $p \in \widehat{S}_2$ mentre $p \notin S'_2$ e quindi, per la formula di Grassmann, $\widehat{S}_2 \cap S'_2$ è una retta, in particolare $\pi_p(\overline{x, y}) = \overline{x', y'}$. Allora π_p è una bijezione fra

punti di S_2 e i punti di S'_2 che manda rette in rette e quindi un isomorfismo di piani proiettivi. ■

In \mathbb{P}_4 si può fare una dimostrazione analoga per provare che tutti i sottospazi S_3 sono fra loro isomorfi. Per quanto riguarda i piani, consideriamo l'applicazione

$$\pi_R : \begin{cases} S_2 & \longrightarrow S'_2 \\ x & \longmapsto x' = S'_2 \cap \widehat{S}_2, \quad \widehat{S}_2 = \overline{x \cup R} \end{cases} ,$$

dove S_2 ed S'_2 sono piani ed R è una retta sghemba con entrambi i piani cioè $R \cap S_2 = \emptyset = R \cap S'_2$ il che implica (dalla formula di Grassmann) $\overline{R \cup S_2} = \mathbb{P}_4 = \overline{R \cup S'_2}$. Per la formula di Grassmann si ha $\dim(\widehat{S}_2) + \dim(S'_2) = \dim(\widehat{S}_2 \cup S'_2) + \dim(\widehat{S}_2 \cap S'_2) = \dim(\overline{R \cup S'_2}) + \dim(\widehat{S}_2 \cap S'_2)$, ossia $\dim(\widehat{S}_2 \cap S'_2) = 2 + 2 - 4 = 0$. Allora per ogni $x \in S_2$, $\pi_R(x) = x' \in S'_2$ è univocamente determinato. Si verifica poi (utilizzando sempre la formula di Grassmann) che ogni retta di S_2 determina con R un S_3 come spazio congiungente, il quale a sua volta interseca S'_2 lungo una retta. Ne deduciamo ancora che vale $S_2 \simeq S'_2$.

Generalizzando ulteriormente, e osservando che due rette proiettive sono banalmente isomorfe (una qualunque bijezione fra esse è infatti un isomorfismo), si ottiene:

2.42 Teorema. *In uno spazio proiettivo n -dimensionale $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ due sottospazi h -dimensionali ($1 \leq h \leq n$) sono isomorfi.*

Capitolo 3

Il piano euclideo reale

Ci occupiamo dello studio del piano affine reale $(\mathbb{A}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ con prodotto scalare euclideo¹, che indicheremo con ‘ \cdot ’, definito sullo spazio vettoriale \mathbb{R}^2 da cui si ottiene il piano stesso. In particolare confronteremo gli automorfismi

- (A) del piano affine euclideo, ovvero $\text{Aut}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}, \cdot)$: indicheremo in questo modo il gruppo delle affinità che conservano la struttura metrica indotta dal prodotto scalare, cioè lasciano inalterati distanza, ortogonalità e angoli;
- (B) del piano metrico, ovvero $\text{Aut}(\mathbb{R}^2, d_\varepsilon)$: indicheremo in questo modo il gruppo delle isometrie bigettive di \mathbb{R}^2 in sè stesso, rispetto alla distanza euclidea d_ε , dove

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : d_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2};$$

- (C) della struttura topologica, ovvero $\text{Aut}(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$: indicheremo in questo modo il gruppo degli omeomorfismi di \mathbb{R}^2 dotato della topologia euclidea τ_ε , dove

$$\tau_\varepsilon := \left\{ \bigcup \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \right\},$$

essendo $\mathcal{B} := \{B(\mathbf{x}_0, r) : \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^+\}$.

Osserviamo subito che tutti gli automorfismi delle strutture (A) e (B) sono anche omeomorfismi della struttura topologica; non vale però il viceversa, come si può subito verificare osservando che per esempio una generica affinità di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ è anche un omeomorfismo, ma non conserva necessariamente il prodotto scalare, nè

¹cioè definito positivo.

la distanza.

Analizziamo ora e mettiamo a confronto gli automorfismi delle strutture (A) e (B).

3.1 Piano affine con prodotto scalare euclideo

Ricordiamo che in uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, dato un prodotto scalare euclideo, è sempre possibile scegliere una base ortonormale; la matrice (simmetrica) ad esso associata diventa allora la matrice identica, infatti se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ e \mathbf{x}, \mathbf{y} sono i vettori delle componenti di \mathbf{v} e \mathbf{w} rispettivamente, rispetto ad una base fissata, si ha $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{x}^t M \mathbf{y}$. Se la base è ortonormale, $M = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = (\delta_{ij}) = I$, allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{x}^t \mathbf{y}$, che è il prodotto scalare canonico. Quindi ogni prodotto scalare euclideo su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita è equivalente al prodotto scalare canonico (basta effettuare un opportuno cambiamento di base).

Come prodotto scalare euclideo nel piano vettoriale \mathbb{R}^2 possiamo allora scegliere sempre quello canonico (rispetto al quale la base canonica è ortonormale).

Ricordiamo che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ poniamo $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

Nel piano vettoriale euclideo così definito consideriamo le *isometrie vettoriali* cioè quelle trasformazioni lineari che conservano il prodotto scalare (o equivalentemente la norma), cioè

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathbb{R}^2) &:= \{T \in \text{GL}(\mathbb{R}^2) : T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{T \in \text{GL}(\mathbb{R}^2) : \|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}, \end{aligned}$$

che, secondo le posizioni fatte, sono tutti e soli gli automorfismi (trasformazioni lineari) di \mathbb{R}^2 rappresentati da matrici ortogonali², per questo motivo chiamati anche *operatori ortogonali*. Ricordando che le matrici reali ortogonali 2×2 formano un gruppo, che si denota con $O_2(\mathbb{R}) \leq GL_2(\mathbb{R})$, risulta pertanto che $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2) \cong O_2(\mathbb{R})$.

Torniamo ora al piano affine euclideo $(\mathbb{A}_2(\mathbb{R}), \cdot)$. Poichè il gruppo degli automorfismi del campo reale è banale, cioè $\text{Aut } \mathbb{R} = \{\text{Id}\}$, dal Teorema fondamentale (2.38) si deduce che $\text{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) = \text{AL}_2(\mathbb{R})$, cioè che le affinità f di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ sono

²Ricordiamo che una matrice $M \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ si dice *ortogonale* se $M^{-1} = M^t$.

tutte e sole le trasformazioni di equazioni

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \quad \text{con } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

cioè se

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

e $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^t$, f è la composizione della traslazione $\tau_{\mathbf{c}}$ con l'applicazione lineare L_A . Ricordiamo inoltre che $\tau_{\mathbf{c}} \circ L_A = L_A \circ \tau_{L_A^{-1}(\mathbf{c})}$.

Come abbiamo precedentemente osservato, per determinare il gruppo $\text{Aut}(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}, \cdot)$, tra le affinità f di $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ dobbiamo considerare in particolare quelle che conservano le nozioni metriche affini indotte dal prodotto scalare euclideo. Tali nozioni sono

- la distanza tra due punti, definita come la norma della differenza tra i due vettori che li rappresentano,
- l'angolo fra due rette, che è essenzialmente l'angolo tra i vettori di direzioni delle rette stesse: ricordiamo che il coseno di tale angolo è determinato a meno del segno dal prodotto scalare di due vettori qualsiasi che rispettivamente generano i sottospazi direzionali delle due rette.

Consideriamo dunque le affinità del piano tali che

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Risulta

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|L_A(\mathbf{x}) + \mathbf{c} - L_A(\mathbf{y}) - \mathbf{c}\| = \|L_A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|$$

e quindi la proprietà richiesta è sempre verificata se e solo se imponiamo che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ si abbia $\|L_A(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. Dunque un'affinità conserva la norma della differenza o, equivalentemente, conserva la distanza, se e solo se l'applicazione lineare associata conserva la norma.

Questo equivale a richiedere che L_A sia un operatore ortogonale, cioè che A sia una matrice ortogonale, per cui indicheremo l'affinità $f = \tau_{\mathbf{c}} \circ L_H$, con H matrice ortogonale. Ora, poichè la traslazione muta rette in rette parallele (cfr. oss. 2.32) ed

L_H conserva il prodotto scalare, risulta automaticamente che l'affinità f conserva anche gli angoli.

In conclusione, il gruppo $\text{Aut}(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}, \cdot)$ degli automorfismi del piano affine euclideo è costituito da tutte e sole le affinità lineari che sono prodotto di una traslazione per un operatore ortogonale, cioè

$$\text{Aut}(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}, \cdot) = \{f = \tau_{\mathbf{c}} \circ L_H : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2, H \in O_2(\mathbb{R})\} \leq AL_2(\mathbb{R}).$$

3.2 Piano affine metrico

Poichè $d_\varepsilon(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, le affinità che conservano la norma della differenza sono esattamente quelle che conservano la distanza euclidea, come abbiamo osservato prima, quindi sono isometrie della struttura metrica. D'altra parte si verifica che le isometrie della struttura metrica sono anche affinità; possiamo infatti dimostrare la seguente

3.1 Proposizione. *Il gruppo strutturale metrico è un sottogruppo del gruppo affine.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo dimostrare che ogni isometria bigettiva di $(\mathbb{R}^2, d_\varepsilon)$ muta rette in rette. Osserviamo che ogni retta può essere vista come asse di un opportuno segmento. Consideriamo infatti la retta $R \in \mathcal{R}$ e un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus R$. Mandiamo da \mathbf{a} la perpendicolare S ad R e sia \mathbf{h} il suo punto di intersezione con R . Sia $\mathbf{b} \in S \setminus \{\mathbf{a}\}$ tale che $d_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = d_\varepsilon(\mathbf{b}, \mathbf{h})$. Il segmento di estremi \mathbf{a} e \mathbf{b} ha come asse la retta R che è quindi il luogo dei punti equidistanti da \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Ogni retta del piano euclideo può dunque essere caratterizzata come luogo dei punti equidistanti da due punti opportunamente assegnati.

Sia ora f un'isometria di $(\mathbb{R}^2, d_\varepsilon)$; allora l'azione di f sulla retta R è data da:

$$f(R) = \{f(\mathbf{x}) : d_\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = d_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{b})\} = \{f(\mathbf{x}) : d_\varepsilon(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{x})) = d_\varepsilon(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{b}))\} \in \mathcal{R}.$$

Segue la tesi ■

3.2 Osservazione. *Dalla dimostrazione della Proposizione precedente si deduce anche che sono affinità tutte le bijezioni del piano metrico \mathbb{R}^2 che conservano l'uguaglianza delle distanze, cioè tali che:*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^2 : (d_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_\varepsilon(\mathbf{x}', \mathbf{y}')) \implies (d_\varepsilon(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d_\varepsilon(f(\mathbf{x}'), f(\mathbf{y}'))).$$

Si noti che queste sono tutte e sole le permutazioni di \mathbb{R}^2 che conservano la struttura geometrica \mathcal{B}_ε (famiglia delle palle aperte euclidee), in altre parole sono tutti e soli gli isomorfismi geometrici di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$: li ritroveremo nel paragrafo (3.6).

Le considerazioni fatte all'inizio di questo paragrafo, insieme alla proposizione 3.1 ci permettono di concludere che

$$\text{Aut}(\mathbb{R}^2, d_\varepsilon) = \text{Aut}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}, \cdot).$$

Le due strutture di piano affine euclideo e di piano metrico euclideo sono perciò equivalenti, e noi ci proponiamo ora di studiare il loro gruppo di automorfismi, che chiameremo, senza far più distinzioni tra le due strutture, gruppo delle *isometrie del piano euclideo (reale)*, e indicheremo con $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$.

3.3 Isometrie del piano euclideo

Come abbiamo visto nei due precedenti paragrafi, possiamo rappresentare il gruppo delle isometrie del piano euclideo reale nel seguente modo:

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^2) = \{\mu = \tau_{\mathbf{c}} \circ L_H : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2, H \in O_2(\mathbb{R})\} \leq AL_2(\mathbb{R}).$$

Le isometrie dunque sono prodotti di traslazioni e di operatori ortogonali. Indichiamo con $\mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ il gruppo delle traslazioni di \mathbb{R}^2 e ricordiamo che abbiamo indicato con $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ il gruppo degli operatori ortogonali di \mathbb{R}^2 .

Da quanto detto sopra abbiamo allora

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^2) \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^2, d_\varepsilon) \leq \mathcal{A}ff(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}),$$

e

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}^2) \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^2, d_\varepsilon) \leq \mathcal{A}ff(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}).$$

Inoltre risulta che

$$(a) \mathcal{T}(\mathbb{R}^2) \circ \mathcal{O}(\mathbb{R}^2) = \text{Isom}(\mathbb{R}^2);$$

$$(b) \mathcal{T}(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{O}(\mathbb{R}^2) = \{\text{Id}\};$$

$$(c) \mathcal{T}(\mathbb{R}^2) \triangleleft \text{Isom}(\mathbb{R}^2).$$

La verifica di (a) e (b) è immediata. Per la (c) ricordiamo che un sottogruppo N di un gruppo G è *normale* (e scriviamo $N \triangleleft G$) se per ogni $g \in G$ si ha $gNg^{-1} = N$ (nel nostro caso è sufficiente verificare che per ogni $L_H \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ e per ogni $\tau \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ si ha $L_H \circ \tau \circ L_H^{-1} \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$: esercizio!).

In base alle proprietà (a), (b) e (c) possiamo affermare che il gruppo delle isometrie di \mathbb{R}^2 è *prodotto semidiretto* dei due sottogruppi delle traslazioni e degli operatori ortogonali, ossia

$$\boxed{\text{Isom}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{T}(\mathbb{R}^2) \rtimes \mathcal{O}(\mathbb{R}^2).}$$

Si dice anche che $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ *si fattorizza* nei due sottogruppi considerati, e ciò equivale ad affermare che *ogni isometria di \mathbb{R}^2 si può esprimere in uno ed un solo modo come prodotto di una traslazione per un operatore ortogonale*. Questo fatto ci permette di ricondurre, in una prima fase, lo studio delle isometrie di \mathbb{R}^2 a quello degli operatori ortogonali, che, dal punto di vista affine, altro non sono che le isometrie che fissano l'origine.

La classificazione degli operatori ortogonali di \mathbb{R}^2 si riporta, a sua volta, alla classificazione delle matrici reali ortogonali, che costituiscono il gruppo $O_2(\mathbb{R})$,

- a determinante positivo:

$$SO_2(\mathbb{R}) = O_2^+(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi[\right\}$$

rappresentano le rotazioni di centro l'origine e angolo ϑ ;

- a determinante negativo:

$$O_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi[\right\}$$

rappresentano le simmetrie rispetto a ciascuna retta per l'origine che forma con l'asse delle ascisse l'angolo $\vartheta/2$.

Le simmetrie assiali sono involutorie, mentre una rotazione non identica è involutoria solo nel caso $\vartheta = \pi$ (simmetria centrale). Inoltre si ha che $\text{SO}_2(\mathbb{R}) \triangleleft \text{O}_2(\mathbb{R})$.

Tornando alle isometrie del piano euclideo, queste risulteranno quindi

- composizione tra traslazione e rotazione di centro l'origine;
- composizione tra traslazione e simmetria rispetto a una retta per l'origine.

Esaminiamo ora i vari casi.

3.3.1 Rotazioni di centro O

Ricordiamo che se $f \in \text{Sym}(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ è *unito* per f se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e $R \in \mathcal{R}$ è *unita come retta* se $f(R) = R$.

Indichiamo con $\rho_{\mathbf{0},\vartheta}$ la rotazione di angolo ϑ centrata nell'origine; essa è associata alla matrice

$$H_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo i punti uniti e le rette unite per $\rho_{\mathbf{0},\vartheta}$. Dobbiamo determinare gli autovalori e gli autospazi di H_ϑ : si otterranno le rette unite e, per autovalori unitari, i punti uniti.

In generale se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, \mathbf{x} è un autovettore e λ l'autovalore corrispondente si ha $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ e $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. Quindi $\|\mathbf{x}\| = \|f(\mathbf{x})\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$, da cui $|\lambda| = 1$. Inoltre gli autovalori sono le due radici di un polinomio di grado due, possiamo quindi avere

(A1) autovalori reali e coincidenti positivi $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Allora otteniamo

$$H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Tutti i punti sono uniti e tutte le rette sono unite (punto per punto): $H_0 = \text{Id}$;

(A2) autovalori reali e coincidenti negativi $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Allora si ha

$$H_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è la matrice associata alla rotazione di angolo π o simmetria centrale. Sono unite tutte le rette per l'origine (in quanto rette) e l'unico punto unito è l'origine. La simmetria centrale è involutoria.

Notiamo che non è possibile avere autovalori reali e distinti, cioè $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, poichè $\det(H_\vartheta) = \lambda_1 \lambda_2 = 1$.

(B) autovalori complessi e coniugati $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\vartheta} = \cos \vartheta \pm i \sin \vartheta$. Allora l'unico punto unito è l'origine e non ci sono rette per O unite.

Esercizio. Se $\vartheta \neq 0$ e $\vartheta \neq \pi$, ogni retta di \mathbb{R}^2 viene mutata attraverso $\rho_{\mathbf{0},\vartheta}$ in una retta che forma un angolo ϑ con la precedente.

Da qui segue, in particolare, che una rotazione che non sia l'identità o la simmetria centrale, non ha rette unite. Per la simmetria centrale, si può verificare che le rette unite sono tutte e sole le rette per O , mentre ogni altra retta viene mutata in una retta parallela.

3.3.2 Simmetrie assiali rispetto a rette vettoriali

Indichiamo con σ_R la simmetria rispetto alla retta per l'origine di primo coseno direttore $\cos \vartheta/2$; essa è associata alla matrice

$$S_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

S_ϑ è simmetrica e ha determinante -1 . Allora gli autovalori sono $+1$ e -1 per ogni ϑ . Attraverso un cambiamento di base (ortonormale) possiamo trasformare (per coniugio) la matrice S_ϑ nella

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ciò equivale a ruotare di $\vartheta/2$ il sistema di riferimento.

I punti uniti sono gli autovettori con autovalore associato 1: quindi tutti e soli i punti della retta $R_{\vartheta/2}$ per la matrice S_ϑ , in particolare per la matrice S_0 sono i punti della retta R_o che è l'asse x . Tale retta viene detta *asse della simmetria*.

Le rette per O unite, oltre all'asse, sono gli autospazi con autovalore associato -1 : quindi per S_ϑ la retta ortogonale ad $R_{\vartheta/2}$, in particolare per S_0 è l'asse y .

Allora ci sono due rette per O unite: l'asse della simmetria punto per punto, la retta per O ortogonale all'asse (unita come retta).

Le simmetrie assiali sono tutte involutorie.

Esercizio. *Ogni altra retta viene trasformata in una retta che forma con l'asse di simmetria lo stesso angolo che forma la prima.*

Da qui segue che le rette unite diverse dall'asse sono tutte e sole le rette ad esso ortogonali.

3.3 Osservazione. *In base a quanto abbiamo visto, risulta che ogni simmetria assiale $\sigma_{R_{\vartheta/2}}$ si può ricondurre alla simmetria rispetto all'asse x , σ_x , attraverso un cambiamento di base ortonormale. Equivalentemente: ogni matrice ortogonale di determinante -1 è ortogonalmente simile a S_0 , dove*

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un cambiamento di base ortonormale corrisponde a una isometria vettoriale di \mathbb{R}^2 e quindi conserva le proprietà metriche (norma, angoli, ortogonalità), dunque si possono ricondurre tutte le proprietà delle simmetrie assiali a quelle della simmetria σ_x rispetto all'asse x .

3.3.3 Rotazioni di centro qualsiasi

Sia $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ e $\vartheta \in [0, 2\pi[$. Consideriamo $\rho_{\mathbf{c},\vartheta}$: vogliamo ottenere la rotazione $\rho_{\mathbf{c},\vartheta}$, ossia la rotazione di centro \mathbf{c} e angolo ϑ .

3.4 Osservazione. *Il gruppo $\mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ è regolare (strettamente transitivo) su \mathbb{R}^2 , cioè*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \exists! \tau \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2) : \tau(\mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

In particolare, se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, la traslazione univocamente determinata che muta $\mathbf{0}$ in \mathbf{y} è proprio quella che abbiamo finora indicato con $\tau_{\mathbf{y}}$.

Ricordando inoltre che ogni traslazione è una isometria (i.e. conserva le proprietà metriche), possiamo dare la seguente

3.5 Definizione. *Definiamo la rotazione $\rho_{\mathbf{c},\vartheta}$ di centro \mathbf{c} e angolo ϑ , come segue:*

$$\rho_{\mathbf{c},\vartheta} := \tau_{\mathbf{c}} \circ \rho_{\mathbf{0},\vartheta} \circ \tau_{\mathbf{c}}^{-1}.$$

Verifichiamo ora che $\rho_{\mathbf{c},\vartheta}$ ha come unico punto unito \mathbf{c} .

$$(\tau_{\mathbf{c}} \circ \rho_{\mathbf{0},\vartheta} \circ \tau_{\mathbf{c}}^{-1})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \iff (\rho_{\mathbf{0},\vartheta} \circ \tau_{\mathbf{c}}^{-1})(\mathbf{x}) = \tau_{\mathbf{c}}^{-1}(\mathbf{x}),$$

cioè $\tau_{\mathbf{c}}^{-1}(\mathbf{x})$ è unito nella rotazione $\rho_{\mathbf{0},\vartheta}$, ma ciò si verifica se e solo se $\tau_{\mathbf{c}}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, ossia $\mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Osserviamo che per le rotazioni di centro qualsiasi valgono tutte le proprietà metriche che valgono per le rotazioni di centro O , dal momento che si ottengono da queste per coniugio con traslazioni che sono isometrie.

Definiamo $\mathcal{R}_{\mathbf{c}} := \{\rho_{\mathbf{c},\vartheta} : \vartheta \in [0, 2\pi[\} \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$. Si ha

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{R}_{\mathbf{0}} \rtimes \langle \sigma_x \rangle = \mathcal{R}_{\mathbf{0}} \dot{\cup} \Sigma_O, \text{ con } \mathcal{R}_{\mathbf{0}} \cong SO_2(\mathbb{R}),$$

dove Σ_O è l'insieme delle simmetrie assiali rispetto a rette per l'origine O . Inoltre, per quanto visto, per ogni $c \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{c}} = \tau_{\mathbf{c}} \circ \mathcal{R}_{\mathbf{0}} \circ \tau_{\mathbf{c}}^{-1}.$$

Passando ai gruppi di matrici possiamo scrivere anche:

$$O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle S_o \rangle.$$

3.3.4 Simmetrie assiali di asse qualsiasi

Vogliamo definire le simmetrie assiali rispetto a rette qualsiasi del piano \mathbb{R}^2 . Sia $R \in \mathcal{R}$ e sia $\vartheta/2$ l'angolo formato con l'asse x ; consideriamo la retta parallela ad R per O , che chiamiamo $R_{\vartheta/2}$.

3.6 Osservazione. *Ora le traslazioni non sono un gruppo transitivo su tutte le rette di \mathbb{R}^2 , ma solo su ciascuna classe di rette parallele, e su tali classi non operano in modo regolare: date cioè due rette parallele, esistono infinite traslazioni che mutano l'una nell'altra, in particolare per traslare $R_{\vartheta/2}$ in R è sufficiente scegliere un punto qualsiasi $\mathbf{c} \in R$ e considerare la traslazione $\tau_{\mathbf{c}}$.*

3.7 Definizione. *Definiamo la simmetria assiale di asse R , σ_R come segue:*

$$\sigma_R := \tau_{\mathbf{c}} \circ \sigma_{R_{\vartheta/2}} \circ \tau_{\mathbf{c}}^{-1}.$$

La definizione precedente è ben posta se si ottiene la stessa trasformazione al variare di $\mathbf{c} \in R$. Consideriamo allora $\mathbf{c} \in R$ e prendiamo un qualunque $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$. Si ottiene: $\tau_{\mathbf{c}} \circ \sigma_{R_{\vartheta/2}} \circ \tau_{\mathbf{c}}^{-1} = \tau_{\mathbf{d}} \circ \sigma_{R_{\vartheta/2}} \circ \tau_{\mathbf{d}}^{-1}$ se e solo se

$$\sigma_{R_{\vartheta/2}} = \tau_{\mathbf{d}}^{-1} \circ \tau_{\mathbf{c}} \circ \sigma_{R_{\vartheta/2}} \circ \tau_{\mathbf{c}}^{-1} \circ \tau_{\mathbf{d}} = \tau_{\mathbf{c}-\mathbf{d}} \circ \sigma_{R_{\vartheta/2}} \circ \tau_{\mathbf{c}-\mathbf{d}}^{-1}.$$

Ponendo $\mathbf{x} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$ la relazione precedente equivale a

$$\tau_{\mathbf{x}} \circ \sigma_{R_{\vartheta/2}} \circ \tau_{\mathbf{x}}^{-1} = \sigma_{R_{\vartheta/2}}$$

e ciò vale se e solo se $\mathbf{x} \in R_{\vartheta/2}$ ovvero $\mathbf{c} - \mathbf{d} \in R_{\vartheta/2}$, il che equivale a richiedere che $\mathbf{d} \in R$.

Lasciamo come esercizio da provare l'ultima uguaglianza, che si può così esprimere: *una simmetria di asse $R_{\vartheta/2}$ commuta con una traslazione $\tau_{\mathbf{x}}$ se e solo se $\mathbf{x} \in R_{\vartheta/2}$.*

3.3.5 Prodotti di simmetrie assiali

Per comprendere meglio il significato della nozione di angolo, conviene premettere alcune considerazioni sulla nozione di *orientazione del piano*.

Orientazione in uno spazio vettoriale o affine reale

In uno spazio vettoriale reale di rango n , diciamo che due basi ordinate \mathcal{B} e \mathcal{B}' *definiscono la stessa orientazione* se, indicata con $M \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ la matrice del cambiamento di base, risulta $\det(M) > 0$, altrimenti definiscono *orientazioni opposte*. Quindi abbiamo due classi di basi di uno spazio vettoriale reale finitamente generato che determinano le due orientazioni opposte dello spazio.

Ciò vale anche per uno spazio affine reale (di dimensione finita), e in particolare per il piano: quando si fissa un riferimento affine si fissano l'origine $\mathbf{0}$ e una base ordinata \mathcal{B}) del corrispondente spazio vettoriale, di conseguenza viene fissata un'orientazione e con essa anche un verso positivo per gli angoli.

3.8 Proposizione. *Una rotazione di centro \mathbf{c} e angolo ϑ è prodotto di due simmetrie assiali rispetto a due rette per \mathbf{c} e formanti un angolo pari a $\vartheta/2$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissati \mathbf{c} e ϑ , alla luce dei precedenti paragrafi possiamo ricondurci al caso di una rotazione di centro $\mathbf{0}$ a meno della traslazione $\tau_{\mathbf{c}}$ di \mathbf{c} in $\mathbf{0}$: consideriamo dunque la retta R coincidente con l'asse x e la retta S che formi con R un angolo $\vartheta/2$. A questo punto basta verificare che

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix},$$

da cui la tesi. ■

Viceversa, la dimostrazione della precedente Proposizione ci mostra anche che vale:

3.9 Corollario. *Il prodotto di due simmetrie assiali con assi incidenti in un punto \mathbf{c} e formanti un angolo ϑ è la rotazione di centro \mathbf{c} e angolo 2ϑ .*

3.10 Osservazione. *Se due rette R ed S formano un angolo ϑ , formano anche un angolo $\pi - \vartheta$. Infatti due rette incidenti determinano quattro semirette di origine il punto d'intersezione, e quindi quattro angoli, a due a due opposti al vertice. Avendo fissato un riferimento affine risulta fissata l'orientazione: se R ed S , in quest'ordine, formano i due angoli ϑ e $\vartheta - \pi$, raddoppiando si hanno gli angoli 2ϑ e $2\vartheta - 2\pi = 2\vartheta \pmod{2\pi}$, quindi in ogni caso si ottiene la rotazione di 2ϑ .*

In generale $\sigma_S \circ \sigma_R \neq \sigma_R \circ \sigma_S$, anzi le due composizioni danno rotazioni opposte, ovvero se a $\sigma_S \circ \sigma_R$ corrisponde una rotazione di angolo 2ϑ , a $\sigma_R \circ \sigma_S$ corrisponde una rotazione di angolo -2ϑ .

3.11 Corollario. *Due simmetrie assiali con assi incidenti in un punto \mathbf{c} sono permutabili se e solo se i loro assi sono ortogonali. Allora hanno come prodotto la simmetria centrale di centro \mathbf{c} .*

Passiamo ora alle traslazioni:

3.12 Proposizione. *Una traslazione $\tau_{\mathbf{c}}$ è prodotto di due simmetrie assiali con gli assi paralleli e ortogonali alla direzione di $\langle \mathbf{c} \rangle$ e che distano $\frac{1}{2}\|\mathbf{c}\|$.*

DIMOSTRAZIONE. A meno di traslazioni e rotazioni possiamo scegliere $\langle \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$ e $\langle \mathbf{e}_2 \rangle = R$. Sia allora S parallela all'asse y passante per il punto $(\frac{1}{2}\|\mathbf{c}\|, 0)$. Risulta che la matrice associata a σ_R è $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\sigma_S = \tau_{\mathbf{c}/2} \circ \sigma_R \circ \tau_{\mathbf{c}/2}^{-1}$. Quindi

$$\sigma_S \circ \sigma_R = \tau_{\mathbf{c}/2} \circ \left(\sigma_R \circ \tau_{\mathbf{c}/2}^{-1} \right) \circ \sigma_R = \tau_{\mathbf{c}/2} \circ \tau_{\mathbf{c}/2} \circ \sigma_R \circ \sigma_R = \tau_{\mathbf{c}},$$

da cui la tesi. ■

3.13 Corollario. *Il prodotto di due simmetrie con assi paralleli è la traslazione di vettore \mathbf{c} ortogonale agli assi e di norma pari al doppio della distanza tra gli assi.*

3.14 Corollario. *Due simmetrie assiali con assi paralleli sono permutabili se e solo se coincidono. In generale, permutando le simmetrie assiali si ottengono traslazioni opposte, ovvero se alla composizione $\sigma_R \circ \sigma_S$ corrisponde la traslazione $\tau_{\mathbf{c}}$, allora alla composizione $\sigma_S \circ \sigma_R$ corrisponde la traslazione $\tau_{-\mathbf{c}}$.*

3.15 Corollario. *Due simmetrie assiali distinte sono permutabili se e solo se il loro prodotto è un'isometria involutoria, se e solo se gli assi delle due simmetrie sono ortogonali. Allora hanno come prodotto la simmetria centrale di centro \mathbf{c} , punto d'intersezione degli assi.*

DIMOSTRAZIONE. Per i Corollari (3.11) e (3.14) è sufficiente provare che $\sigma_R \circ \sigma_S$ è involutorio se e solo se $\sigma_R \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_R$, infatti:

$$\sigma_S \circ \sigma_R \circ \sigma_S \circ \sigma_R = \text{Id} = \sigma_S \circ \sigma_S \circ \sigma_R \circ \sigma_R \iff \sigma_R \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_R,$$

da cui la tesi. ■

Studiamo ora i prodotti di rotazioni e traslazioni. Sappiamo che il prodotto di traslazioni è ancora una traslazione. Dimostriamo ora il seguente

3.16 Lemma. *Il prodotto di una rotazione e di una traslazione è una rotazione.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $\rho_{\mathbf{0},\vartheta} \circ \tau_{\mathbf{c}}$. Scegliamo le rette P e Q come nella Proposizione (3.12) in modo tale che Q sia la retta per $\mathbf{0}$ ortogonale a $\langle \mathbf{c} \rangle$ e sia P la parallela a Q passante per $(-\frac{c}{2}, 0)$. Scegliamo ora le rette R ed S come nella Proposizione (3.8) per ottenere la $\rho_{\mathbf{c},\vartheta}$: sia $R \equiv Q$ e sia S la retta per $\mathbf{0}$ formante un angolo di $\vartheta/2$ con R . Allora

$$\rho_{\mathbf{0},\vartheta} \circ \tau_{\mathbf{c}} = \sigma_S \circ (\sigma_R \circ \sigma_Q) \circ \sigma_P = \sigma_S \circ \sigma_P.$$

Poichè l'angolo che la retta S forma con P è $\vartheta/2$ e $P \cap S \neq \emptyset$, sia $\{\mathbf{d}\} = P \cap S$ e pertanto otteniamo una rotazione di centro \mathbf{d} e angolo ϑ . ■

3.17 Lemma. *Il prodotto di due rotazioni aventi lo stesso centro $\rho_{\mathbf{c},\vartheta} \circ \rho_{\mathbf{c},\psi}$ è una rotazione $\rho_{\mathbf{c},(\vartheta+\psi)}$.*

3.18 Lemma. *Il prodotto di due rotazioni $\rho_{\mathbf{c},\varphi}$ e $\rho_{\mathbf{0},\vartheta}$ aventi centri distinti può essere una rotazione o una traslazione.*

DIMOSTRAZIONE. Risulta infatti $\rho_{\mathbf{0},\vartheta} = \sigma_Q \circ \sigma_P$ e $\rho_{\mathbf{c},\varphi} = \sigma_S \circ \sigma_R$ per P, Q, R, S rette opportune. Abbiamo

$$\rho_{\mathbf{c},\varphi} \circ \rho_{\mathbf{0},\vartheta} = \sigma_S \circ \sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_S \circ \sigma_P,$$

facendo coincidere Q con R . Se ora $\vartheta + \varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$ allora $P \cap S = \{\mathbf{d}\}$ e abbiamo una rotazione di angolo $\vartheta + \varphi$. Se invece $\vartheta + \varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$, allora $P \cap S = \emptyset$ e quindi otteniamo una traslazione. ■

Ne segue che rotazioni e traslazioni formano un sottogruppo di $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ che indicheremo con $\mathcal{G}(\mathcal{T}(\mathbb{R}^2), \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$. Allora il prodotto di un numero pari di simmetrie assiali è una rotazione o una traslazione.

Le simmetrie assiali sono isometrie inverse, mentre se composte in numero pari danno isometrie dirette (ossia appartengono a $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$).

Consideriamo ora il prodotto di un numero dispari di simmetrie assiali.

3.19 Teorema (delle tre simmetrie). *Il prodotto di tre simmetrie assiali è ancora una simmetria assiale se e solo se i tre assi appartengono a uno stesso fascio.*

DIMOSTRAZIONE. Date le tre rette Q, R, S , sia ha che $\sigma_S \circ \sigma_R \circ \sigma_Q$ è una simmetria assiale se e solo se esiste una retta P tale che

$$\sigma_P = \sigma_S \circ \sigma_R \circ \sigma_Q \iff \sigma_S \circ \sigma_R = \sigma_P \circ \sigma_Q.$$

Se S ed R sono incidenti allora a primo membro abbiamo una rotazione e pertanto anche $\sigma_P \circ \sigma_Q$ è la medesima rotazione, il che equivale a dire che R, S ed anche P, Q appartengono al fascio di centro il centro della rotazione. Se $S \parallel R$ allora siamo nel caso di una traslazione quindi $\sigma_P \circ \sigma_Q$ rappresenta la stessa traslazione il che equivale a dire che $Q \parallel R \parallel S$. ■

Osserviamo che siamo in grado di costruire σ_P .

Esercizio (glissosimmetrie). *Il prodotto di tre simmetrie assiali con assi generici è sempre esprimibile come prodotto di una simmetria assiale σ_R per una traslazione $\tau_{\mathbf{c}}$ di vettore parallelo all'asse della simmetria. Risulta inoltre $\tau_{\mathbf{c}} \circ \sigma_R = \sigma_R \circ \tau_{\mathbf{c}}$.*

3.20 Definizione. *Chiamiamo glissosimmetria un prodotto di un numero dispari di simmetrie assiali.*

Ci proponiamo ora di dimostrare che ogni isometria di \mathbb{R}^2 è prodotto di un numero finito di simmetrie assiali.

3.4 Classificazione delle isometrie di \mathbb{R}^2

3.21 Lemma. *Ogni isometria di \mathbb{R}^2 che fissa tre punti non allineati è l'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'isometria e siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tre punti di \mathbb{R}^2 non allineati. Supponiamo che $\mu(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, $\mu(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ e $\mu(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$. Dimostriamo che per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ risulta $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Dal fatto che μ è una isometria si ha

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_{\varepsilon}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = d_{\varepsilon}(\mu(\mathbf{a}), \mu(\mathbf{x})) = d_{\varepsilon}(\mathbf{a}, \mu(\mathbf{x})).$$

Ne segue che, se $\mu(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$, \mathbf{a} appartiene all'asse del segmento di estremi \mathbf{x} e $\mu(\mathbf{x})$. Ripetendo lo stesso ragionamento per i punti \mathbf{b} e \mathbf{c} si giunge ad una contraddizione

perchè per ipotesi \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} non sono allineati. L'unica possibilità è $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. ■

3.22 Lemma. *Date due terne di punti non allineati $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$ e $\{\mathbf{a}'_i\}_{i=1,2,3}$ tali che, per $i, j = 1, 2, 3$, $d_\varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = d_\varepsilon(\mathbf{a}'_i, \mathbf{a}'_j)$, esiste al più una isometria $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\mu(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}'_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che esistano $\mu, \nu \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ tali che $\mu(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}'_i$ e $\nu(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}'_i$ per $i = 1, 2, 3$. Ne segue che $(\mu^{-1} \circ \nu)(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Allora per il Lemma (3.21) $(\mu^{-1} \circ \nu) = \text{Id}$, da cui $\mu = \nu$. ■

3.23 Lemma. *Date due terne di punti non allineati $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1,2,3}$ e $\{\mathbf{a}'_i\}_{i=1,2,3}$ tali che, per $i, j = 1, 2, 3$, $d_\varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = d_\varepsilon(\mathbf{a}'_i, \mathbf{a}'_j)$, esiste un prodotto di al più tre simmetrie assiali che muta \mathbf{a}_i in \mathbf{a}'_i per ogni $i = 1, 2, 3$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia σ_1 la simmetria assiale che ha per asse l'asse del segmento di estremi \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}'_1 . Abbiamo che σ_1 opera nel modo seguente:

$$\sigma_1 : \begin{cases} \mathbf{a}_1 & \mapsto \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mapsto \overline{\mathbf{a}_2} \\ \mathbf{a}_3 & \mapsto \overline{\mathbf{a}_3} \end{cases}$$

Inoltre

$$d_\varepsilon(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2) \stackrel{Ip}{=} d_\varepsilon(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \stackrel{\sigma_1}{=} d_\varepsilon(\mathbf{a}'_1, \overline{\mathbf{a}_2}),$$

pertanto \mathbf{a}'_1 appartiene all'asse del segmento di estremi \mathbf{a}'_2 e $\overline{\mathbf{a}_2}$. Sia σ_2 la simmetria assiale rispetto all'asse del segmento di estremi \mathbf{a}'_2 e $\overline{\mathbf{a}_2}$, allora σ_2 opera nel seguente modo:

$$\sigma_2 : \begin{cases} \mathbf{a}'_1 & \mapsto \mathbf{a}'_1 \\ \overline{\mathbf{a}_2} & \mapsto \mathbf{a}'_2 \\ \overline{\mathbf{a}_3} & \mapsto \widetilde{\mathbf{a}_3} \end{cases} .$$

Si ha quindi

$$d_\varepsilon(\mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3) \stackrel{Ip}{=} d_\varepsilon(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \stackrel{\sigma_1}{=} d_\varepsilon(\overline{\mathbf{a}_2}, \overline{\mathbf{a}_3}) \stackrel{\sigma_2}{=} d_\varepsilon(\mathbf{a}'_2, \widetilde{\mathbf{a}_3}),$$

quindi \mathbf{a}'_2 appartiene all'asse del segmento di estremi \mathbf{a}'_3 e $\widetilde{\mathbf{a}}_3$ e anche

$$d_\varepsilon(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_3) \stackrel{I_p}{=} d_\varepsilon(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) \stackrel{\sigma_1}{=} d_\varepsilon(\mathbf{a}'_1, \overline{\mathbf{a}}_3) \stackrel{\sigma_2}{=} d_\varepsilon(\mathbf{a}'_1, \widetilde{\mathbf{a}}_3),$$

allora \mathbf{a}'_1 appartiene all'asse del segmento di estremi \mathbf{a}'_3 , $\widetilde{\mathbf{a}}_3$. Sia ora σ_3 la simmetria assiale rispetto all'asse del segmento individuato dai punti \mathbf{a}'_3 e $\widetilde{\mathbf{a}}_3$:

$$\sigma_3 : \begin{cases} \mathbf{a}'_1 & \mapsto \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 & \mapsto \mathbf{a}'_2 \\ \widetilde{\mathbf{a}}_3 & \mapsto \mathbf{a}'_3 \end{cases},$$

la tesi segue componendo σ_1 , σ_2 e σ_3 . ■

3.24 Teorema (di classificazione). *Ogni isometria di \mathbb{R}^2 è prodotto di un numero finito di simmetrie assiali.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ e siano \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 e \mathbf{a}_3 tre punti di \mathbb{R}^2 non allineati. Poichè f è anche una collineazione risulta che i punti $f(\mathbf{a}_i)$ non sono allineati, e poichè f è un'isometria, risulta che

$$d_\varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = d_\varepsilon(f(\mathbf{a}_i), f(\mathbf{a}_j)), \quad \text{per } i, j = 1, 2, 3.$$

Per il Lemma (3.23) esiste un prodotto $\mu = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ di tre simmetrie assiali tale che $\mu(\mathbf{a}_i) = f(\mathbf{a}_i)$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Per il Lemma (3.22) $\mu = f$. ■

Pertanto otteniamo:

- *Isometrie dirette:* $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \mathcal{G}(\mathcal{T}(\mathbb{R}^2), \mathcal{O}(R^2))$. Esse sono date dai prodotti di due simmetrie assiali;
- *Isometrie inverse:* $\text{Isom}^-(\mathbb{R}^2)$. Esse sono prodotti di tre simmetrie assiali, quindi sono le glissosimmetrie o antitraslazioni (in particolare le simmetrie assiali).

3.5 Isometrie di \mathbb{R}^2 come funzioni di variabile complessa

Identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} , cioè ogni vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con il numero complesso $z = x + iy$, possiamo rappresentare le isometrie come funzioni di una variabile complessa.

(A) *Traslazioni.*

Sia $u = a + ib \in \mathbb{C}$ il vettore di traslazione. Consideriamo la traslazione

$$\tau_u : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + u \end{cases} ,$$

pertanto le traslazioni sono addizioni con $u \in \mathbb{C}$ fissato.

(B) *Rotazioni.*

(a) *Rotazioni di centro O ed angolo ϑ .* Otteniamo

$$\rho_{0,\vartheta} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & ze^{i\vartheta} \end{cases} .$$

Le rotazioni di centro O sono le moltiplicazioni per un numero complesso di modulo unitario³.

(b) *Rotazioni di centro u ed angolo ϑ .* Esse si ottengono a partire dalla rotazione $\rho_{0,\vartheta}$ coniugandola con la traslazione τ_u , pertanto per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$(\tau_u \circ \rho_{0,\vartheta} \circ \tau_u^{-1})(z) = u + (z - u)e^{i\vartheta} = ze^{i\vartheta} + u(1 - e^{i\vartheta}) ,$$

e quindi:

$$\rho_{u,\vartheta} = \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & ze^{i\vartheta} + u(1 - e^{i\vartheta}) \end{cases} .$$

Avevamo osservato che componendo una rotazione con una traslazione si ottiene una rotazione di cui è possibile conoscere il centro che ora è facile da calcolare: data

$$\rho_{x,\vartheta} = \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & ze^{i\vartheta} + v \end{cases} ,$$

il centro è il punto $u \in \mathbb{C}$ tale che $ue^{i\vartheta} + v = u$, ossia $u = v/(1 - e^{i\vartheta})$.

³Le rotazioni di centro O sono automorfismi di $(\mathbb{C}, +)$. Non sono automorfismi di tutto il campo: se $c = e^{i\vartheta}$ e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, allora $c(z_1 + z_2) = cz_1 + cz_2$, ma $c(z_1 z_2) \neq (cz_1)(cz_2)$.

(C) *Simmetrie assiali.*

(a) Simmetria rispetto all'asse x : è il coniugio (automorfismo del campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$)

$$\sigma_0 : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{cases} .$$

(b) Simmetria rispetto all'asse y :

$$\sigma_{\pi/2} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & -\bar{z} \end{cases} .$$

(c) Simmetria rispetto ad una retta per l'origine: allora

$$\sigma_{\vartheta/2}(z) = \rho_{\mathbf{0}\vartheta/2} \circ \sigma_0 \circ \rho_{\mathbf{0}\vartheta/2}^{-1} = e^{i\frac{\vartheta}{2}} \overline{(ze^{-i\frac{\vartheta}{2}})} = \bar{z}e^{i\vartheta},$$

quindi

$$\sigma_{\vartheta/2} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z}e^{i\vartheta} \end{cases} .$$

(d) Simmetria rispetto ad una retta R qualsiasi: preso $u \in R$, risulta

$$\sigma_R(z) = \tau_u \circ \sigma_{\vartheta/2} \circ \tau_u^{-1} = u + e^{i\vartheta} \overline{(z - u)} = \bar{z}e^{i\vartheta} + u - \bar{u}e^{i\vartheta},$$

quindi

$$\sigma_R : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z}e^{i\vartheta} + u - \bar{u}e^{i\vartheta} \end{cases} .$$

(D) *Glissosimmetrie*: abbiamo

$$\sigma_{gliss} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z}e^{i\vartheta} + u - \bar{u}e^{i\vartheta} + re^{i\vartheta/2} \end{cases} ,$$

dove $r \geq 0$.

3.6 Similitudini di \mathbb{R}^2

Consideriamo ora la moltiplicazione per un numero complesso qualunque $u = re^{i\vartheta}$.

Poniamo

$$\gamma_u : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & uz \end{cases} .$$

Che tipo di trasformazione induce nel piano euclideo?

Al variare di $z \in \mathbb{C}$ il prodotto uz (con $u = re^{i\vartheta}$, $u \neq 0$) equivale alla composizione

di una rotazione centrata in O di angolo ϑ e una moltiplicazione per $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Chiamiamo ω_r la moltiplicazione per r , cioè

$$\omega_r : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & rz \end{cases} .$$

Allora ω_r , nella sua azione su \mathbb{R}^2 , è una *omotetia vettoriale di caratteristica r positiva*. Nel piano euclideo, ω_r conserva l'uguaglianza delle distanze, cioè

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{C} : |a - b| = |c - d| \iff |\omega_r(a) - \omega_r(b)| = |\omega_r(c) - \omega_r(d)|.$$

Inoltre

$$\forall u, v \in \mathbb{C} \quad |\omega_r(u) - \omega_r(v)| = |ru - rv| = |r||u - v| = r|u - v|.$$

Da questa proprietà si deduce che attraverso ω_r triangoli vengono mutati in triangoli simili e pertanto ω_r conserva gli angoli.

3.25 Definizione. Una similitudine di \mathbb{R}^2 è una biiezione che conserva gli angoli o, equivalentemente, muta segmenti in segmenti proporzionali. Dunque per una similitudine esiste un coefficiente di proporzionalità $r > 0$ tra segmenti corrispondenti, che viene detto la caratteristica, o costante di similitudine

Quindi l'omotetia vettoriale ω_r è una particolare similitudine del piano euclideo reale, anzi ogni composizione di un numero finito di omotetie e di isometrie risulta essere una similitudine. D'altra parte si può provare che le composizioni, in numero finito, di omotetie di centro O ed isometrie esauriscono tutte le similitudini di \mathbb{R}^2 , che, espresse come funzioni di variabile complessa, saranno del tipo

$$f_{u,v} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & uz + v \end{cases} \quad \text{e} \quad \bar{f}_{u,v} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & u\bar{z} + v \end{cases}, \quad u \neq 0$$

dove $u, v \in \mathbb{C}$, $u = re^{i\vartheta}$, con $r > 0$. Queste sono tutte e sole le affinità della retta affine complessa \mathbb{C} che fissano \mathbb{R} ; esse formano un gruppo che denotiamo con

$$\mathcal{A}ff(\mathbb{C}) := \mathcal{A}ff^+(\mathbb{C}) \cup \mathcal{A}ff^-(\mathbb{C}),$$

essendo

$$\mathcal{A}ff^+(\mathbb{C}) := \{\tau_v \circ \gamma_u : u \in \mathbb{C}^*, v \in \mathbb{C}\},$$

e

$$\mathcal{A}ff^-(\mathbb{C}) := \{\tau_v \circ \gamma_u \circ \sigma_0 : u \in \mathbb{C}^*, v \in \mathbb{C}\}.$$

Chiamiamo *affinità dirette*, o *lineari* le affinità di $\mathcal{A}ff^+(\mathbb{C})$, mentre chiamiamo *affinità inverse* o *antiaffinità* quelle di $\mathcal{A}ff^-(\mathbb{C})$.

Possiamo quindi facilmente classificare le similitudini di \mathbb{R}^2 che formano un gruppo che denotiamo con $\text{Simil}(\mathbb{R}^2)$ e che, da quanto abbiamo osservato, agisce come il gruppo delle affinità sulla retta affine complessa, cioè

$$\mathcal{A}ff(\mathbb{C}) \simeq \text{Simil}(\mathbb{R}^2).$$

Premettiamo la seguente

3.26 Definizione. *Chiamiamo roto-omotetia la composizione di una rotazione e di un'omotetia con lo stesso centro (non è necessario che il centro sia O) e anti-omotetia la composizione di una simmetria assiale con una omotetia di centro appartenente all'asse.*

Risulta quindi che le similitudini di \mathbb{R}^2 si classificano nel seguente modo:

1.

$$\begin{aligned} \text{Similitudini dirette} &= \{f_{u,v} \mid u, v \in \mathbb{C}, u \neq 0\} = \\ &= \left\{ \text{Roto-omotetie e traslazioni} \right\} = \text{Simil}^+(\mathbb{R}^2), \\ \text{Simil}^+(\mathbb{R}^2) &= \mathcal{A}ff^+(\mathbb{C}) \triangleleft \mathcal{A}ff(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

di cui sono casi particolari:

- le traslazioni ($u = 1$);
- le rotazioni ($u = e^{i\vartheta}$);
- le omotetie di centro qualsiasi ($\vartheta = 0$, ossia $u \in \mathbb{R}^+$). In generale non sono isometrie, lo sono solo per $u = \pm 1$;

2.

$$\begin{aligned} \text{Similitudini inverse} &= \{\bar{f}_{u,v} \mid u, v \in \mathbb{C}, u \neq 0\} = \\ &= \left\{ \text{Anti-omotetie e anti-traslazioni} \right\} = \text{Simil}^-(\mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

$$\text{Simil}^-(\mathbb{R}^2) = \sigma_0 \circ \mathcal{A}ff^+(\mathbb{C}),$$

di cui sono casi particolari

- le glissosimmetrie (= anti-traslazioni) con $u = e^{i\vartheta}$;
- le antiomotetie ($\vartheta = 0$, ossia $u \in \mathbb{R}^+$)

Capitolo 4

Il piano assoluto reale

Diamo ora un elenco di proprietà che caratterizzano il piano euclideo reale metrico $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, d)$ con $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^+$, e precisamente quelle che qui sotto numeriamo da (1) a (7a). Useremo le prime sei come assiomi definenti la nozione di **piano assoluto reale**. Osserviamo che nelle proprietà (2)- (5) assume un ruolo fondamentale l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} , che induce la sua struttura di campo ordinato completo all'interno di ogni retta per mezzo di opportune funzioni di parametrizzazione (proprietà (3)) e che viene utilizzato additivamente per definire la misura degli angoli (proprietà (5)).

- (1) per due punti distinti passa una ed una sola retta ed esistono almeno tre punti non allineati;
- (2) la funzione d è una metrica su \mathcal{P} .
- (3) su ogni retta $R \in \mathcal{R}$ è possibile definire una funzione biiettiva $\chi_R : R \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a, b \in R : d(a, b) = |\chi_R(a) - \chi_R(b)|,$$

4.1 Osservazione. Se χ_R è una siffatta funzione definita su una retta R , allora $\forall k \in \mathbb{R}$ anche le funzioni

$$\pm\eta_R : R \rightarrow \mathbb{R},$$

definite da

$$\pm\eta_R(a) = \pm\chi_R(a) + k$$

soddisfano alla proprietà (3).

4.2 Osservazione. *Risulta che $\forall R \in \mathcal{R}$,*

$$\forall a, b, c \in R : \chi_R(a) \leq \chi_R(b) \leq \chi_R(c) \implies d(a, c) = d(a, b) + d(b, c);$$

4.3 Definizione. *Dati $R \in \mathcal{R}$, $a, b, u \in R$, definiamo:*

il segmento di estremi a e b (si suppone che $\chi_{\overline{a,b}}(a) \leq \chi_{\overline{a,b}}(b)$) come l'insieme

$$[a, b] := \{x \in \overline{a, b} : \chi_{\overline{a,b}}(a) \leq \chi_{\overline{a,b}}(x) \leq \chi_{\overline{a,b}}(b)\}$$

(analogamente nel caso di disuguaglianza opposta);

le semirette di origine u , l'una opposta all'altra, gli insiemi

$$\overrightarrow{R}_u := \{x \in R : \chi_R(u) \leq \chi_R(x)\},$$

$$\overleftarrow{R}_u := \{x \in R : \chi_R(x) \leq \chi_R(u)\};$$

la lunghezza del segmento $[a, b]$ come la distanza $d(a, b) = |\chi_R(a) - \chi_R(b)|$.

Due segmenti si dicono congruenti se hanno la stessa lunghezza.

(4) ogni retta $R \in \mathcal{R}$ divide l'insieme \mathcal{P} dei punti in tre sottoinsiemi disgiunti:

$$\mathcal{P} = H_1 \dot{\cup} R \dot{\cup} H_2$$

tali che per ogni $a, b \in \mathcal{P} \setminus R$, con $a \neq b$, si ha che $a, b \in H_i$ se e solo se $[a, b] \cap R = \emptyset$ e $a \in H_i, b \in H_j$ con $i \neq j$ se e solo se $[a, b] \cap R \neq \emptyset$. H_1 e H_2 sono detti *semipiani di origine R* .

4.4 Definizione. *Siano \overrightarrow{R}_u e \overrightarrow{S}_u due semirette aventi la stessa origine u . Chiamiamo angolo la coppia ordinata $(\overrightarrow{R}_u, \overrightarrow{S}_u)$ che indicheremo anche con $\widehat{\overrightarrow{R}_u \overrightarrow{S}_u}$ oppure con $\widehat{\overrightarrow{R}_u \overrightarrow{S}}$. Le due semirette sono dette lati dell'angolo ed u è detto vertice dell'angolo.*

Se due semirette $\overrightarrow{R}_u, \overrightarrow{S}_u$ aventi la stessa origine sono distinte e non opposte, chiameremo *interno* dell'angolo $\widehat{\overrightarrow{R}_u, \overrightarrow{S}_u}$ l'intersezione del semipiano di origine la retta di \overrightarrow{R}_u che contiene \overrightarrow{S}_u col semipiano di origine la retta di \overrightarrow{S}_u che contiene \overrightarrow{R}_u . Diremo anche che un punto che sta nell'interno di un angolo è *interno* all'angolo dato.

(5) Ad ogni angolo $\widehat{\overrightarrow{RoS}}$ si può associare un numero reale $\varphi(\widehat{\overrightarrow{RoS}})$ nell'intervallo $[0, \pi]$, che viene detto la *misura in radianti dell'angolo* $\widehat{\overrightarrow{RoS}}$. Inoltre φ soddisfa le seguenti proprietà:

- (a) $\varphi(\widehat{\overrightarrow{RoR}}) = 0$ e $\varphi(\widehat{\overleftarrow{RoR}}) = \pi$;
- (b) la somma delle misure di angoli *adiacenti* (cioè con il vertice ed un lato in comune e gli altri due lati costituiti da semirette opposte) è π ;
- (c) se \overrightarrow{T} è interna all'angolo $\widehat{\overrightarrow{RoS}}$, allora $\varphi(\widehat{\overrightarrow{RoT}}) + \varphi(\widehat{\overrightarrow{ToS}}) = \varphi(\widehat{\overrightarrow{RoS}})$;
- (d) fissata una retta R , un punto o su R ed una semiretta \overrightarrow{R}_o su R , in ciascuno dei due semipiani di origine R l'insieme delle semirette S_o è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali $\alpha \in [0, \pi]$ in modo tale che $\varphi(\widehat{\overrightarrow{R}_o, \overrightarrow{S}_o}) = \alpha$;
- (e) nelle ipotesi del punto precedente, se la semiretta \overrightarrow{S}_o è determinata da un punto s allora la misura $\alpha = \varphi(\widehat{\overrightarrow{RoS}})$ dell'angolo dipende con continuità da s , cioè se s' è un punto variabile ed α' la misura del corrispondente angolo, si ha $|\alpha - \alpha'| \rightarrow 0$ per $d(s, s') \rightarrow 0$.

4.5 Definizione. Chiamiamo triangolo una figura costituita da tre punti non allineati a_1, a_2, a_3 , detti vertici del triangolo, e dai tre segmenti $[a_i, a_j]$ ($i \neq j$) detti lati del triangolo.

(6) Dati due triangoli $\{a_i\}_{i=1,2,3}$ e $\{b_i\}_{i=1,2,3}$, se essi hanno due lati e gli angoli compresi congruenti¹, ovvero per $j = 2, 3$:

$$d(a_j, a_1) = d(b_j, b_1) \quad \text{e} \quad \varphi(\widehat{a_2 a_1 a_3}) = \varphi(\widehat{b_2 b_1 b_3}),$$

allora i due triangoli sono congruenti, cioè hanno lati ed angoli ordinatamente congruenti.

4.6 Definizione. Se $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, d)$ è uno spazio lineare metrico in cui sono definite una famiglia di funzioni biettive χ e una funzione φ in modo tale che valgano le proprietà (1), (2), (3), (4), (5), (6), diciamo che $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, d, \chi, \varphi)$ è un piano assoluto reale

¹Due angoli si dicono *congruenti* se hanno la stessa misura.

Se nelle medesime ipotesi vale anche

(7a) (Assioma di Euclide) per ogni $R \in \mathcal{R}$ e per ogni $p \in \mathcal{P} \setminus R$, esiste una ed una sola $S \in \mathcal{R} \setminus R$ tale che $p \in S$ e $R \cap S = \emptyset$,

si ottiene il *piano euclideo reale*.

Se invece, oltre alle proprietà (1) ... (6), vale

(7b) (Assioma di Lobačevskij) esistono una retta $R \in \mathcal{R}$ ed un punto $p \in \mathcal{P} \setminus R$ tali che esistono almeno due rette distinte $S, S' \in \mathcal{R} \setminus R$ tali che $S \cap R = \emptyset = S' \cap R$ e $S \cap S' = \{p\}$,

si ottiene il *piano iperbolico reale*.

Da (7b), in base alle considerazioni del capitolo successivo, vedremo che si può dedurre un enunciato più forte, in cui i quantificatori sono universali.

4.7 Definizione. Due piani assoluti reali $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, d, \chi, \varphi)$ e $(\mathcal{P}', \mathcal{R}', d', \chi', \varphi')$ si dicono isomorfi (e scriveremo $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, d, \chi, \varphi) \simeq (\mathcal{P}', \mathcal{R}', d', \chi', \varphi')$) se esiste tra essi un isomorfismo geometrico f che conserva le funzioni d, χ, φ , cioè tale che:

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)), \quad \varphi\left(\widehat{\overrightarrow{R}u\overrightarrow{S}}\right) = \varphi'\left(f\left(\overrightarrow{R}\right)\widehat{f(u)f\left(\overrightarrow{S}\right)}\right).$$

e, per ogni $R \in \mathcal{R}$,

$$\chi_R = \pm \chi'_{f(R)} + k$$

per un opportuno $k \in \mathbb{R}$.

Sappiamo che f manda punti in punti e rette in rette, rette che non si intersecano in rette che non si intersecano. Poichè le funzioni χ e χ' rispettivamente inducono l'ordinamento nei due modelli e la f trasforma la famiglia χ nella χ' nel senso visto sopra, allora f trasforma anche segmenti in segmenti, semirette in semirette e di conseguenza angoli in angoli.

4.8 Osservazione. Per la proprietà (6) possiamo definire una funzione Φ che associa alla terna (r, s, ϑ) il numero reale positivo t , lunghezza del terzo lato del triangolo di lati di lunghezze r ed s ed angolo compreso di misura ϑ , ovvero

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \pi[& \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (r, s, \vartheta) & \longmapsto t \end{cases}$$

Utilizzando gli assiomi (1) - (7a) di piano euclideo e, rispettivamente, (1) - (7b) di piano iperbolico, si possono poi dimostrare una serie di proprietà che permettono di ricavare le classiche formule del teorema del coseno, sia per il piano euclideo che per il piano iperbolico, provando in tal modo che tale funzione Φ è univocamente determinata in ciascun tipo di piano assoluto, indipendentemente dal modello che si considera. Risulta infatti

per il piano euclideo:

$$t^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta,$$

per il piano iperbolico:

$$\cosh t = \cosh r \cosh s - \sinh r \sinh s \cos \vartheta.$$

Diamo ora un sommario elenco di classici teoremi che si possono provare in un piano assoluto reale, senza distinzione fra i casi euclideo ed iperbolico dato che sono tutti teoremi che non dipendono dalla nozione di parallelismo, ma discendono dai soli assiomi (1) - (6).

- Tutti i criteri di congruenza dei triangoli;
- Teoremi sulle disuguaglianze di lati ed angoli ad essi opposti in un triangolo o in triangoli distinti;
- Teorema sul triangolo isoscele;
- Teorema di esistenza e unicità del punto medio di un segmento;
- Teorema dell'angolo esterno (solo quello sulla disuguaglianza);

- La somma degli angoli interni di un triangolo è minore o uguale ad un angolo piatto;
- Teorema di esistenza ed unicità della perpendicolare;
- Teorema di esistenza di una retta che non interseca una retta data e passante per un punto dato non appartenente ad essa (*Esistenza della parallela*).
- Definizione di asse di un segmento e sua caratterizzazione come luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento.

4.1 Categoricalità degli assiomi di piano assoluto reale

Vogliamo dimostrare che due piani assoluti reali dello stesso tipo sono isomorfi. Anzitutto introduciamo in un piano assoluto un sistema di coordinate polari.

Fissato un punto $o \in \mathcal{P}$ e una semiretta \vec{R}_o , ogni punto $x \in \mathcal{P}$ individua univocamente la coppia ordinata $(r, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$, dove $r := d(o, x)$ e ϑ è l'angolo di vertice o e lati \vec{R}_o e la semiretta per x uscente da o . Risulta anche viceversa che ogni coppia $(r, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ individua univocamente un punto $x \in \mathcal{P}$.

4.9 Definizione. *Chiamiamo coordinate polari del punto x la coppia (r, ϑ) , e identifichiamo ogni punto x con le sue coordinate polari (r, ϑ) , scrivendo $x = (r, \vartheta)$.*

Consideriamo due modelli di piano assoluto reale, diciamo $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{R}, d, \chi, \varphi)$ e $\mathcal{M}' = (\mathcal{P}', \mathcal{R}', d', \chi', \varphi')$.

4.10 Lemma. *Condizione necessaria affinché $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'$ è che \mathcal{M} ed \mathcal{M}' siano entrambi euclidei o entrambi iperbolici.*

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathcal{M} euclideo e sia $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ un isomorfismo. Come abbiamo già osservato, α manda rette che (non) si intersecano in rette che (non) si intersecano. Siano $R' \in \mathcal{R}'$ e $p' \in \mathcal{P}' \setminus R'$. Se $p = \alpha^{-1}(p')$ si ha che ogni retta per p' è immagine di una retta per p in \mathcal{M} . Poichè \mathcal{M} è euclideo (per (7a)), per

p passa una ed una sola retta che non interseca $R = \alpha^{-1}(R')$. Ne segue che per p' passa una ed una sola retta che non interseca R' . Allora, per l'arbitrarietà di p' ed R' , segue che \mathcal{M}' è euclideo. ■

4.11 Teorema. *Siano \mathcal{M} e \mathcal{M}' due piani assoluti reali entrambi euclidei o entrambi iperbolici. Allora $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo due sistemi di coordinate polari rispettivamente in \mathcal{M} e \mathcal{M}' . Siano o ed \vec{R}_o in \mathcal{M} e o' e \vec{R}'_o in \mathcal{M}' . Sia

$$\alpha : \begin{cases} \mathcal{P} & \longmapsto \mathcal{P}' \\ x = (r, \vartheta) & \longmapsto x' = (r, \vartheta) \end{cases} .$$

L'applicazione α è biiettiva proprio per come abbiamo definito le coordinate polari. Dimostriamo che α è un'isometria. Siano $x, y \in \mathcal{P}$ e $x' = \alpha(x), y' = \alpha(y) \in \mathcal{P}'$. Abbiamo due possibilità:

1. x ed y non sono allineati con o . Allora x, y ed o definiscono un triangolo. Supponiamo che $x = (r, \vartheta)$ e $y = (s, \psi)$, allora $x' = (r, \vartheta)$ e $y' = (s, \psi)$; quindi anche x' ed y' non sono allineati con o' . Per l'Osservazione (4.8) si ha che $d(x; y) = \Phi(r, s, \vartheta - \psi) = d(x'; y')$.

2. x ed y sono allineati con o . Allora supponiamo che $x = (r, \vartheta)$ e $y = (s, \vartheta)$. Ne segue che $x' = (r, \vartheta)$ e $y' = (s, \vartheta)$ sono allineati con o' , quindi $d(x, y) = |r - s| = d'(x', y')$. Se invece $x = (r, \vartheta)$ e $y = (s, \vartheta + \pi)$, avremo $d(x, y) = r + s = d'(x', y')$. Dobbiamo ora dimostrare che nel piano iperbolico l'isometria α è una collineazione. Abbiamo già visto che ciò vale nel piano euclideo (cfr. Proposizione (3.1)) e per dimostrarlo abbiamo usato le proprietà dell'esistenza e dell'unicità della retta perpendicolare a una retta in un punto, dell'intersezione di rette perpendicolari, e la proprietà dell'asse di un segmento: tutte proprietà indipendenti dalla nozione di parallelismo. Ne deduciamo che anche nel piano iperbolico ogni isometria è una collineazione. Da qui, e dal fatto che α conserva le distanze e quindi muta triangoli in triangoli cingrudenti, e angoli in angoli congruenti, segue che α conserva la funzione φ .

Inoltre risulta immediatamente che l'isometria α è compatibile con la famiglia χ

di parametrizzazioni delle rette, nel senso che per ogni retta R esiste un $k \in \mathbb{R}$ tale che per ogni punto $x \in R, \chi_R(x) = \pm \chi'_{\alpha(R)}(\alpha(x)) + k$.

■

4.2 Isometrie e simmetrie assiali in un piano assoluto

Dalla dimostrazione del teorema (4.11) si deduce anche che una qualsiasi isometria bijectiva tra due piani assoluti (considerati come semplici spazi metrici) conserva necessariamente anche la struttura lineare, la famiglia di funzioni χ e la funzione φ , risultando di conseguenza un isomorfismo tra i due piani. D'altra parte, ogni isomorfismo è per definizione un'isometria.

Per i piani assoluti possiamo dunque *identificare le nozioni di isomorfismo e di isometria*, e diremo indifferentemente che due piani assoluti sono *isometrici* o *isomorfi*.

Introduciamo a questo punto in un piano assoluto reale la nozione di simmetria assiale, che viene definita utilizzando le sole nozioni di punto medio e di perpendicolarità, e che risulta dunque godere di proprietà caratteristiche, indipendenti dal parallelismo e quindi valide nel caso iperbolico come in quello euclideo. Di notevole rilievo è la generalizzazione ad ogni piano assoluto del Teorema di classificazione che avevamo già dimostrato per il caso euclideo (cfr. (3.24)), affermando che ogni isometria di un piano assoluto reale è prodotto di un numero finito di simmetrie assiali.

4.12 Definizione. *Chiamiamo simmetria assiale di asse $R \in \mathcal{R}$, una trasformazione del piano assoluto che fissa ogni punto della retta R e associa ad ogni punto $p \in \mathcal{P} \setminus R$ quel punto $p' \in \mathcal{P}$ tale che R sia l'asse del segmento $[p, p']$.*

Una simmetria assiale è dunque una trasformazione involutoria del piano assoluto che fissa tutti e soli i punti di una retta R ; inoltre si dimostra immediatamente

(sfruttando i criteri di congruenza dei triangoli) che è un'isometria; anzi, le simmetrie assiali risultano essere caratterizzate da queste proprietà, come risulta dalla seguente

4.13 Proposizione. *Le simmetrie assiali di un piano assoluto sono tutte e sole le isometrie non identiche aventi una retta di punti fissi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia α un'isometria non identica che fissa tutti i punti di una retta R e sia p un punto non fissato da α ; detto $p' := \alpha(p)$, per ogni punto $a \in R$ risulta $d(p, a) = d(\alpha(p), \alpha(a)) = d(p', a)$ e quindi R è l'asse del segmento $[p, p']$. Ciò implica che p e p' giacciono in semipiani diversi rispetto ad R da cui segue che α , essendo un'isometria, scambia i due semipiani. Se ora x è un punto qualsiasi non appartenente ad R , il suo trasformato x' , dovendo stare nel semipiano opposto rispetto ad R , sarà necessariamente distinto da x e dunque R è asse del segmento $[x, x']$. ■

4.14 Teorema (di classificazione). *Ogni isometria di un piano assoluto reale è prodotto di un numero finito (al più tre) di simmetrie assiali.*

Capitolo 5

Il piano iperbolico reale

5.1 Proprietà del piano iperbolico reale

Dal sistema di assiomi (1) - (7b) che, come abbiamo visto, caratterizza il piano iperbolico reale, si possono dedurre facilmente alcune classiche proposizioni, che qui ci limitiamo a raccogliere senza dimostrazioni (per i dettagli, si può consultare [15]). Sia dunque $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, d, \chi, \varphi)$ un modello di piano iperbolico reale (o *il* piano iperbolico reale, a norma del teorema (4.11)).

5.1.1 Rette h-parallele e angolo di parallelismo

Siano $R \in \mathcal{R}$ una retta e $p \in \mathcal{P} \setminus R$ un punto non appartenente ad R , tali che esistano almeno due rette distinte che passano per p e non intersecano R . Si può provare allora che esistono infinite rette che passano per p e non intersecano R . Tra queste possiamo considerarne due particolari, S e T , che costituiscono gli elementi separatori tra la classe delle rette per p che intersecano R e quella delle rette per p che non intersecano la retta R .

5.1 Definizione. *Nelle ipotesi date, chiamiamo rette h-parallele, o parallele iperboliche alla retta R per il punto p tali due rette separatrici S e T . In tal caso scriveremo*

$$SHR, \quad e \quad THR.$$

Tutte le altre rette per p che non intersecano la retta R si dicono iperparallele. Diremo inoltre che la retta R è h-parallela a se stessa ed è l'unica per ogni punto $q \in R$.

Si può provare che le due rette per p h-parallele ad R formano angoli congruenti con la retta per p perpendicolare ad R ; d'altra parte, ovviamente, per $q \in R$ la retta per q h-parallela ad R è R stessa ed è perpendicolare ad ogni sua perpendicolare.

A priori, data una qualsiasi retta R e dato un qualsiasi punto $p \notin R$, non è escluso che sia unica la retta per p che non interseca R : in tal caso chiameremo provvisoriamente tale retta h-parallela ad R per il punto p . Vedremo fra poco che tale caso non si può verificare.

In conclusione, risulta ben posta la seguente

5.2 Definizione. *Dati una retta $R \in \mathcal{R}$ e un punto $p \in \mathcal{P}$, chiamiamo angolo di parallelismo relativo alla retta R e al punto p l'angolo (acuto se $p \notin R$ e per p passano due distinte h-parallele a R , retto altrimenti) individuato dalla perpendicolare ad R per p e da ciascuna delle rette per p h-parallele ad R .*

5.3 Osservazione. *Si dimostra (cfr. e.g. [15]) che l'angolo di parallelismo α relativo ad R e al punto p non dipende dalla retta e dal punto considerati, ma risulta dipendere unicamente dalla distanza di p da R , anzi si prova che esso è una funzione strettamente decrescente e continua della distanza d , che assume il valore $\frac{\pi}{2}$ quando $d = 0$ e tende a 0 per $d \rightarrow \infty$; denotiamo tale funzione nel seguente modo:*

$$\Pi : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow &]0, \frac{\pi}{2}] \\ d & \longmapsto & \Pi(d) = \alpha \end{cases}$$

In base all'osservazione (5.3) si ottiene immediatamente che per una qualsiasi retta R ed un qualsiasi punto p non appartenente ad essa, poichè la distanza d di p da R è necessariamente maggiore di 0, viene definito un angolo di parallelismo $\alpha = \Pi(d) < \frac{\pi}{2}$, dunque acuto, il che implica che vi sono due distinte rette passanti per p e h-parallele alla retta R , simmetriche rispetto alla perpendicolare condotta ad R per p .

Ciò comporta che l'assioma di Lobačevskij (7b), espresso mediante quantificatori esistenziali, può essere espresso nella forma più forte, ma equivalente, con i quantificatori universali:

(7b') Per ogni retta $R \in \mathcal{R}$ e per ogni punto $p \in \mathcal{P} \setminus R$, esistono almeno due rette distinte $S, S' \in \mathcal{R} \setminus R$ tali che $S \cap R = \emptyset = S' \cap R$ e $S \cap S' = \{p\}$.

Siano $R, S \in \mathcal{R}$ con RHS e sia α_p l'angolo di parallelismo determinato dal punto $p \in S$.

Si può provare (cfr. [15]) che al variare del punto p' sulla semiretta \overrightarrow{S}_p , che determina l'angolo α_p con la perpendicolare ad R per p , l'angolo di parallelismo $\alpha_{p'}$, relativo alla retta R ed al punto p' , varia a sua volta: in particolare esso aumenta di ampiezza allontanando p' da p e, nello stesso tempo, diminuisce la distanza $d_{p'}$ di p' dalla retta R . Per questo motivo la semiretta \overrightarrow{S}_p viene detta *asintotica* rispetto alla retta R , ed in particolare rispetto alla semiretta di R che giace con \overrightarrow{S}_p nello stesso semipiano rispetto alla perpendicolare ad R per p .

5.4 Definizione. Diciamo che una retta SHR è asintotica, o *h-parallelà*, alla retta R in un dato verso. Se $S \neq R$ avremo allora che per ogni $p \in S$, una delle due semirette di S di origine p , \overrightarrow{S} , è asintotica rispetto alla semiretta di R di origine h (piede della perpendicolare ad R per p) e che giace nello stesso semipiano di \overrightarrow{S} ; tale semiretta \overrightarrow{R} determina su R il verso di *h-parallelismo* rispetto alla retta S . Se $S \equiv R$, diremo che R è *h-parallelà* a se stessa in entrambi i versi.

5.5 Osservazione. Dalle considerazioni precedenti risulta che, date due rette *h-parallelà* e distinte R ed S , queste non determinano un angolo di parallelismo; infatti la distanza tra una delle due rette e un punto qualsiasi dell'altra varia al variare del punto p' che si considera su una di esse e tende a 0 nel verso del parallelismo, mentre tende a $+\infty$ se il punto p' si muove nel verso opposto.

Per un punto p esterno ad una retta R passano due parallele iperboliche a R , ciascuna in uno dei due versi determinati su R da h , piede della perpendicolare condotta da p ad R .

Relativamente al parallelismo iperbolico si possono dimostrare le seguenti proprietà:

5.6 Proposizione. La relazione di parallelismo iperbolico, o *h-parallelismo*, in un dato verso è una relazione di equivalenza sull'insieme \mathcal{R} delle rette del piano iperbolico.

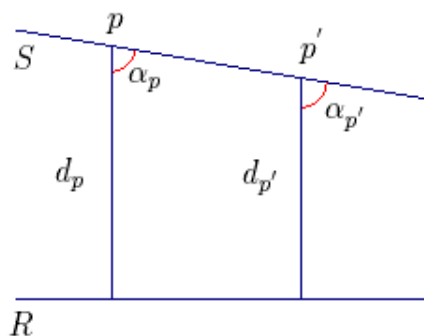


Figura 5.1: Rette h-parallele: $\alpha_p < \alpha_{p'}$, $d_p > d_{p'}$

5.7 Definizione. Chiamiamo fascio asintotico una classe di h-parallelismo in un verso di rette iperboliche, detta anche h-punto improprio.

5.8 Osservazione. Ogni retta iperbolica appartiene esattamente a due fasci asintotici in quanto due sono i versi che si possono considerare su di essa, dunque ad ogni retta iperbolica corrispondono due h-punti impropri.

5.1.2 Rette iperparallele

Dati una retta R e le sue due rette h-parallele S e T passanti per un punto p , le rette *iperparallele* ad R sono le rette del fascio di centro p che non intersecano R , comprese in una delle due coppie di angoli opposti al vertice individuate da S e T . Sia h il piede della perpendicolare ad R per p . Se fra le iperparallele consideriamo quella ortogonale alla retta $\overline{h,p}$ osserviamo che essa è simmetrica rispetto all'asse $\overline{h,p}$. Chiamiamo questa retta P . Si dimostra che se consideriamo un punto q su P che si allontana in uno qualsiasi dei due versi da p , risulta che la sua distanza da R aumenta indefinitamente. La distanza minima di P da R è perciò $d(p, h)$.

D'altra parte:

5.9 Proposizione. Date due rette iperparallele R ed S , esistono e sono unici due punti $q \in S$ e $p \in R$ tali che la retta $\overline{p,q}$ sia perpendicolare sia ad S che ad R . Tale perpendicolare è quella che individua la minima distanza tra R ed S , cioè la minima distanza tra un generico punto di S ed R .

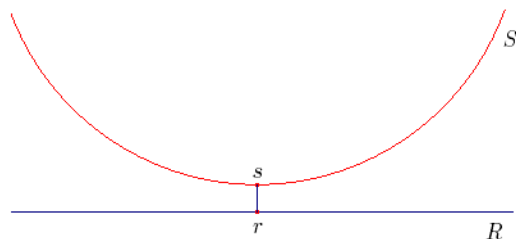


Figura 5.2: Rette iperparallele

5.1.3 Rette incidenti

Siano R ed S tali che $R \cap S = a \in \mathcal{P}$. Sia α l'angolo (acuto o retto) formato dalle due rette e consideriamo una delle due semirette di origine a , \vec{R}_a , sulla retta R . Sia P_x la retta perpendicolare a R passante per il generico punto $x \in \vec{R}_a$. Esiste un punto b di \vec{R}_a tale che per ogni x compreso tra a e b (escluso b) si abbia che $P_x \cap S \neq \emptyset$, per ogni $x \in \vec{R}_a \setminus [a, b]$ si abbia $P_x \cap S = \emptyset$, e per $x = b$ si abbia $P_x \cap S = \emptyset$, oppure $P_x = S$, e in tal caso si ha $b = a$, a seconda che α sia acuto o retto.

Tale punto b è univocamente individuato sulla semiretta \vec{R}_a dalla condizione $d(a, b) = \Pi^{-1}(\alpha)$ e ovviamente coincide con a per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (che, come abbiamo visto, dà $d(a, b) = 0$).

Quanto detto è in accordo col fatto che, nel caso in cui R ed S siano perpendicolari, per ogni punto $x \in R$, se $x \neq a$ la retta per x perpendicolare a R non interseca S , mentre se $x = a$ tale retta coincide con S .

5.2 Il modello del semipiano di Poincaré

Descriveremo ora un modello di piano iperbolico reale che risulta immerso nel piano euclideo reale \mathbb{R}^2 (identificato con la retta complessa \mathbb{C}), per cui gli elementi che costituiscono il modello (i punti, le rette, la relazione di h-parallelismo, la distanza, le parametrizzazioni delle rette, la misura degli angoli) verranno descritti in termini di geometria euclidea (e di numeri complessi).

Si consideri come *insieme di punti* il semipiano

$$\mathcal{P} := \mathbb{R}_+^2 \sim \mathbb{C}_+ := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

Si definiscano *rette* le semirette verticali (aperte) e le semicirconferenze (aperte) con centro sull'asse x , quindi ortogonali all'asse x stesso, cioè

$$\mathcal{R} := \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$$

essendo

$$\mathcal{R}_1 = \{\{z = x + iy : x = k, y > 0\} : k \in \mathbb{R}\}$$

e

$$\mathcal{R}_2 = \{\{z = x + iy : (x - a)^2 + y^2 = r^2, y > 0\} : a, r \in \mathbb{R}, r \neq 0\}.$$

Chiamiamo *h-punti impropri* i punti dell'asse x , più un ulteriore h-punto improprio che corrisponde al fascio asintotico delle rette di \mathcal{R}_1 (semirette verticali) e che indicheremo con ∞ .

L'insieme dei punti propri e degli h-punti impropri di tale modello può essere visto immerso nella retta $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, ossia la retta proiettiva complessa, nel cui unico punto improprio ∞ possiamo considerare identificata l'intera classe dei punti impropri del piano affine reale \mathbb{R}^2 :

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \sim \mathbb{C} \cup \{\infty\} \sim \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}.$$

Dati due punti $a, b \in \mathcal{P}$, definiamo la *distanza iperbolica tra a e b* nel modo seguente:

$$d_H(a, b) := |\log(a, b, u, v)|,$$

essendo u e v gli h-punti impropri della retta $\overline{a, b}$, e avendo denotato, in generale, con

$$(a, b, u, v) := \frac{(a - u)(b - v)}{(b - u)(a - v)} \quad \text{se } a, b, u, v \in \mathbb{C}$$

$$(a, b, u, \infty) := \frac{(a - u)}{(b - u)} \quad \text{per } a, b, u \in \mathbb{C}$$

il *birapporto* dei quattro punti indicati, considerati come numeri complessi o, più in generale, come punti della retta proiettiva complessa $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (cfr. [7], [16]).

Si osservi che se quattro punti $a, b, c, d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ appartengono ad una stessa retta o circonferenza del piano euclideo reale immerso nella retta proiettiva complessa, il loro birapporto risulta essere reale.

Infatti, se i punti sono su una retta, si può sempre effettuare una opportuna rotazione del piano euclideo che, come abbiamo visto, corrisponde ad una moltiplicazione per un numero complesso (di modulo unitario) composta con un'addizione di un altro numero complesso, e si verifica subito che tali operazioni lasciano invariato il birapporto; in questo modo si porta la quaterna originaria in quattro punti distinti dell'asse reale (eventualmente uno all'infinito), il cui birapporto risulta reale. In particolare, per la distanza tra due punti di una retta di \mathcal{R}_1 si ottiene:

$$d_H(a, b) = |\log(a, b, u, v)| = \left| \log \frac{d_\varepsilon(a, u)}{d_\varepsilon(b, u)} \right| = \left| \log \frac{y_1}{y_2} \right| \in \mathbb{R},$$

essendo v il punto improprio della retta $\overline{a, b}$ e y_1, y_2 le ordinate (i.e. parti immaginarie) di a e di b rispettivamente.

Nel caso della distanza tra due punti di una retta di \mathcal{R}_2 , è facile verificare (Esercizio!) che

$$d_H(a, b) = |\log(a, b, u, v)| = \left| \log \frac{d_\varepsilon(a, u)d_\varepsilon(b, v)}{d_\varepsilon(b, u)d_\varepsilon(a, v)} \right| \in \mathbb{R}.$$

(abbiamo qui indicato con d_ε la distanza euclidea).

Per quanto riguarda la *misura degli angoli*, si considera la misura euclidea degli angoli formati dalle tangenti nel punto comune alle curve che in questo modello rappresentano le semirette.

Il modello descritto viene detto *modello del semipiano di Poincaré* e lo denotiamo con $\mathbb{H}_2(\mathbb{R})$. Verifichiamo che questo modello soddisfa gli assiomi (1) - (7b) (in alcuni casi diamo solo dei cenni).

(1) *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.* Infatti se i due punti hanno la stessa ascissa allora per essi passa una ed una sola retta di \mathcal{R}_1 , altrimenti se $u = x_1 + iy_1$ e $v = x_2 + iy_2$ con $x_1 \neq x_2$, allora per essi passa un'unica retta

di \mathcal{R}_2 (semicirconferenza il cui centro è dato dall'intersezione dell'asse di $[u, v]$ con l'asse x).

(2) La distanza d_H verifica le ordinarie proprietà di una metrica: la verifica è basata sulle proprietà dei prodotti di birapporti e sul fatto che attraverso la funzione logaritmo la moltiplicazione si trasforma in addizione.

Osservazione: non conviene fare una verifica diretta (piuttosto macchinosa) della proprietà triangolare, ma basta osservare che essa si può dedurre dalle prime due proprietà della distanza, dalla (3) qui sotto e dai teoremi sui triangoli (che conducono al classico teorema di disuguaglianza fra i lati di un triangolo). Per una trattazione di questo tipo, si veda ad es. [13]

(3) Per $R \in \mathcal{R}$, basta fissare un punto $o \in \mathbb{R}$, e definire, per ogni $z \in R$, $\chi_R(z) := \log(o, z, u, v)$; poi si applicano le proprietà dei birapporti, in particolare: $(o, z, u, v) = (u, v, o, z) = (u, v, z, o)^{-1}$, e poi $(u, v, a, o)(u, v, o, b) = (u, v, a, b)$, che, passando ai logaritmi, e ai valori assoluti, ci dà la proprietà caratteristica della χ_R .

(4) L'ordinamento del piano del modello è naturalmente indotto da quello del piano euclideo.

(5) Gli angoli nel modello sono esattamente coincidenti con gli angoli euclidei.

(6) L'assioma (6) segue facilmente (come vedremo nel paragrafo 5.4.2) dalla transitività del gruppo delle isometrie del modello sulle coppie di triangoli aventi due lati e l'angolo fra essi compreso congruenti.

(7b) *Dato un punto z ed una retta R , esistono almeno due rette S e T con $S \cap R = \emptyset = T \cap R$ e $z \in S \cap T$. Infatti se $R \in \mathcal{R}_1$, possiamo determinare le due rette per z h-parallele ad R considerando la semiretta verticale (euclidea) S per z e la semicirconferenza (euclidea) T che passa per z e per il punto d'intersezione dell'asse x con la retta R . Se $R \in \mathcal{R}_2$, possiamo considerare le due semicirconfe-*

renze euclidee S e T che passano per z e per le due intersezioni di R con l'asse x .

Esercizio 1. *Determinare la retta perpendicolare a $R \in \mathcal{R}$ passante per un punto $p \in \mathcal{P}$.*

Sia $R \in \mathcal{R}$ e consideriamo un punto $p \notin R$. Se la retta è rappresentata nel semipiano euclideo da una semiretta verticale, allora la perpendicolare a R per p si ottiene considerando la semicirconferenza con centro sull'asse x passante per p e per il punto a simmetrico (in senso euclideo) di p rispetto ad R .

Supponiamo ora che R sia rappresentata da una semicirconferenza di centro o e raggio r e $p \notin R$. Se p si trova sulla stessa verticale passante per o , allora la retta cercata coincide con tale verticale. Altrimenti la retta iperbolica da determinare è costituita da una semicirconferenza euclidea con centro sull'asse delle x ortogonale alla semicirconferenza euclidea R e passante per p : tali condizioni (ed ora lo vedremo sinteticamente) determinano univocamente una circonferenza G nel piano euclideo. Poniamo $q := (\overline{o,p} \cap G) \setminus \{p\}$. Per il teorema della tangente e della secante, la condizione di ortogonalità tra G ed R si può esprimere mediante la condizione

$$d_\varepsilon(o, q) \cdot d_\varepsilon(o, p) = r^2. \quad (5.1)$$

Il segmento $[o, p]$ è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo su cui vale la relazione (5.1). Per costruire il triangolo, nel caso che p sia esterno ad R mandiamo una tangente ad R da p e chiamiamo t il punto di tangenza. Il punto q sarà allora il piede della perpendicolare condotta da t a $\overline{o,p}$; nel caso che p sia interno ad R innalziamo da p la perpendicolare ad $\overline{o,p}$ e da uno dei punti t in cui questa interseca R mandiamo la tangente ad R : tale retta, intersecata con $\overline{o,p}$, determina il punto q . La retta iperbolica G perpendicolare ad R passante per p è quindi quella data dalla semicirconferenza per p e q e con il centro sull'asse x . Tale circonferenza è univocamente determinata.

Se il punto $p \in R$ si ha che $p \equiv q$ e la semicirconferenza ortogonale ad R è quella passante per p con il centro sull'intersezione tra l'asse x e la tangente ad R in p .

Per comprendere in modo unitario la struttura geometrica del modello di

Poincaré e per studiarne gli automorfismi (isometrie), è necessario ora introdurre uno spazio geometrico di notevole interesse in cui il modello (ed anche il piano euclideo che contiene il modello) si immerge.

5.3 Il piano di Moebius e le sue trasformazioni

Si consideri l'insieme di punti $\mathcal{P} := \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, che altro non è che la *retta proiettiva complessa*. Tale insieme di punti, dotato della struttura geometrica \mathcal{C} costituita dalle rette (ciascuna con l'aggiunta del punto ∞) e dalle circonferenze di \mathbb{R}^2 , costituisce uno spazio geometrico $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ che viene detto il *piano di Möbius*.

Gli elementi di \mathcal{C} vengono detti *rette (o cerchi) di Moebius*: vediamo come si rappresentano analiticamente. Una generica circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2$. Moltiplicando per $A \in \mathbb{R}$ e ponendo $D = A(a^2 + b^2 - r^2)$ si ottiene

$$A(x^2 + y^2) - 2Aax + -2Aby + D = 0. \quad (5.2)$$

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Allora $\operatorname{Re}(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e inoltre $\operatorname{Im}(z) = y = \frac{i}{2}(z - \bar{z})$, pertanto l'equazione (5.2) diventa

$$Az\bar{z} + B(z + \bar{z}) + Ci(z - \bar{z}) + D = 0, \quad \text{con } B = -Aa \text{ e } C = -Ab. \quad (5.3)$$

L'equazione (5.3) rappresenta, nel piano \mathbb{R}^2 , una retta per $A = 0$, e una circonferenza per $A \neq 0$, quindi l'equazione (5.3) rappresenta la generica retta di Moebius.

5.3.1 Inversione circolare

Introduciamo innanzi tutto un'importante trasformazione geometrica definita nel piano euclideo reale che si estende in modo naturale al piano di Moebius e che verrà utilizzata nel seguito per definire particolari isometrie del modello di Poincaré di piano iperbolico.

5.10 Definizione. *Consideriamo nel piano euclideo \mathbb{R}^2 una circonferenza R di*

raggio r e centro un punto \mathbf{o} . L'applicazione

$$\Omega_R : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{o}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{o}\} \\ \mathbf{p} & \longmapsto & \mathbf{p}' \end{cases}$$

dove \mathbf{p}' appartiene alla semiretta contenente \mathbf{p} di origine \mathbf{o} ed è tale che $d_\varepsilon(\mathbf{o}, \mathbf{p}) \cdot d_\varepsilon(\mathbf{o}, \mathbf{p}') = r^2$, viene detta *inversione* rispetto alla circonferenza R , o *inversione circolare* di centro \mathbf{o} e potenza r^2 , ed R viene detta *circonferenza (o circolo) d'inversione*.

Risulta immediatamente dalla definizione che tale applicazione Ω_R è una trasformazione involutoria di $(\mathbb{R}^2)^* := \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{o}\}$ che fissa tutti e soli i punti $\mathbf{p} \in R$. Risultano inoltre unite (non punto per punto) tutte e sole le rette passanti per \mathbf{o} . Per quanto riguarda il punto \mathbf{o} , in base alla definizione esso non ha alcun corrispondente per cui deve essere escluso dal dominio della funzione e anche dal codominio affinché sia bijectiva. Osservando però che su ogni retta per \mathbf{o} l'inverso del punto \mathbf{p} tende ad allontanarsi progressivamente da \mathbf{o} via via che \mathbf{p} si avvicina ad \mathbf{o} , fino a tendere al punto improprio della retta $\overline{\mathbf{o}, \mathbf{p}}$ al tendere di \mathbf{p} ad \mathbf{o} : se si volesse estendere la corrispondenza anche al punto \mathbf{o} esso avrebbe dunque come corrispondente un punto indefinito sulla retta impropria; possiamo esprimere questo fatto in modo suggestivo dicendo che *il punto \mathbf{o} scoppia sulla retta impropria*.

Esercizio 2. *Dimostrare sinteticamente le seguenti proprietà dell'inversione circolare:*

- i) *ogni retta non passante per il centro \mathbf{o} d'inversione viene trasformata in una circonferenza passante per \mathbf{o} , e, viceversa (per l'involutorietà), ogni circonferenza per \mathbf{o} si trasforma in un retta non per \mathbf{o} ;*
- ii) *ogni circonferenza non passante per \mathbf{o} viene trasformata in una circonferenza non passante per \mathbf{o} ;*
- iii) *sono unite tutte e sole le circonferenze passanti per coppie di punti corrispondenti, e tali circonferenze sono esattamente le circonferenze ortogonali al circolo d'inversione.*

E' possibile inoltre provare la seguente proprietà:

iv) *l'inversione circolare è una trasformazione conforme, cioè conserva gli angoli (invertendone però l'orientazione).*

Se ora consideriamo il piano euclideo \mathbb{R}^2 identificato con la retta affine complessa \mathbb{C} , scegliendo il circolo d'inversione con il centro nell'origine $\mathbf{0}$ di \mathbb{R}^2 , identificata con lo 0 del campo complesso, possiamo esprimere l'azione dell'inversione Ω_0^r di centro 0 e potenza r^2 su \mathbb{C}^* ottenendo:

$$\Omega_0^r : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z = ke^{i\vartheta} & \longmapsto & z' = \frac{r^2}{k}e^{i\vartheta} \end{cases} .$$

Per $z \in \mathbb{C}^*$, risulta $\Omega_0^r(z) = r^2/\bar{z}$; in particolare, per $r = 1$, risulta $\Omega_0^1(z) = 1/\bar{z}$, dunque $\Omega_0^1 =: \Omega_0$, detta *inversione fondamentale*, risulta essere, su \mathbb{C}^* , la composizione della funzione 'reciproco' $z \mapsto 1/z$ con la funzione 'coniugio' $z \mapsto \bar{z}$.

A questo punto è immediato ricavare le equazioni di Ω_0^r in $(\mathbb{R}^2)^*$:

$$\begin{cases} x' & = & \frac{r^2x}{x^2 + y^2} \\ y' & = & \frac{r^2y}{x^2 + y^2} \end{cases} .$$

Analizziamo ora l'azione dell'inversione fondamentale che trasforma ogni $z \neq 0$ in $1/\bar{z}$ sulle rette e sulle circonferenze del piano euclideo.

L'equazione (5.3) diventa:

$$\frac{A}{z\bar{z}} + B\frac{(z + \bar{z})}{z\bar{z}} + Ci\frac{(z - \bar{z})}{z\bar{z}} + D = 0,$$

ovvero

$$A + B(z + \bar{z}) + Ci(z - \bar{z}) + Dz\bar{z} = 0.$$

Dunque l'inversione fondamentale agisce come una permutazione sulla famiglia \mathcal{C} delle rette di Moebius.

Si noti che questa semplice osservazione permette di dare un'immediata dimostrazione analitica generale delle proprietà i), ii) e iii) dell'inversione circolare.

In particolare, si può osservare che:

- (a) ponendo $A = 0$ e $D \neq 0$, si ottiene che le rette non passanti per 0 si trasformano in circonferenze passanti per 0 ;
- (b) ponendo $A = 0$ e $D = 0$, si ottiene che le rette per 0 sono rette unite, quindi sono tutte e sole le rette unite;
- (c) ponendo $A \neq 0$ e $D = 0$, si ottiene che le circonferenze per 0 si trasformano in rette non passanti per 0 ;
- (d) ponendo $A \neq 0$ e $D \neq 0$, si ottiene che le circonferenze non per 0 si trasformano in circonferenze non per 0 .

5.3.2 Proiezione stereografica

Si consideri, nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , il piano E_0 di equazione $z = 0$ e la sfera

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Sia $\mathbf{n} := (0, 0, 1) \in S^2$ il cosiddetto ‘polo nord’. Si definisca la seguente applicazione biiettiva:

$$\Pi_{\mathbf{n}}(p) : \begin{cases} S^2 \setminus \{\mathbf{n}\} & \longrightarrow E_0 \\ \mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) & \longmapsto E_0 \cap \overline{\mathbf{n}, \mathbf{p}} \end{cases}$$

chiamata *proiezione stereografica della sfera* (dal polo nord sul piano equatoriale).

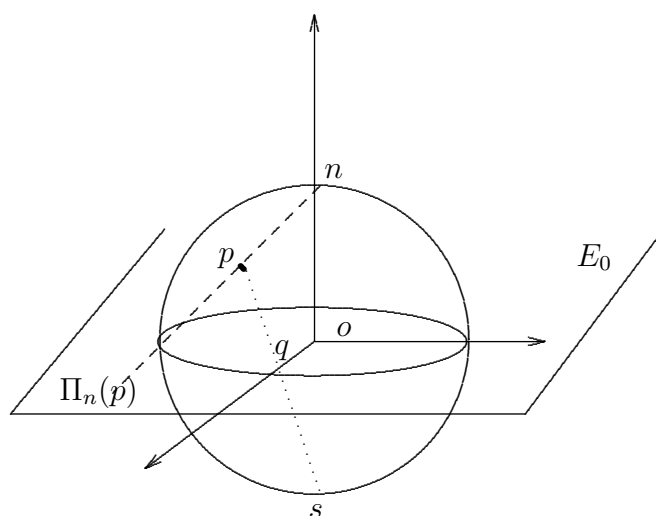


Figura 1: proiezione stereografica

Poichè la retta $\overline{\mathbf{n}, \mathbf{p}}$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = (z_0 - 1)t + 1 \end{cases},$$

si ottiene, per $z = 0$, $t = 1/(1 - z_0)$, quindi

$$\Pi_{\mathbf{n}} : \begin{cases} S^2 \setminus \{\mathbf{n}\} & \longrightarrow & E_0 \simeq \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{1 - z_0}, \frac{y_0}{1 - z_0}, 0 \right) \end{cases}.$$

L'applicazione inversa si ottiene osservando che, se ora $\mathbf{q} = (u, v, 0)$ è un punto del piano E_0 , la retta $\overline{\mathbf{n}, \mathbf{q}}$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = ut \\ y = vt \\ z = -t + 1 \end{cases}.$$

Se ora consideriamo l'intersezione (oltre ad \mathbf{n}) di tale retta con la sfera S^2 , di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, si ottiene

$$(u^2 + v^2 + 1)t^2 - 2t + 1 = 1,$$

da cui, se si esclude il caso $t = 0$ che corrisponde al punto \mathbf{n} ,

$$t = \frac{2}{1 + u^2 + v^2}.$$

Segue che

$$\Pi_{\mathbf{n}}^{-1} : \begin{cases} E_0 \simeq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & S^2 \setminus \{\mathbf{n}\} \\ (u, v, 0) & \longmapsto & \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2} \right) \end{cases}.$$

La proiezione stereografica permette di rappresentare la sfera S^2 completa (compreso il punto \mathbf{n}) come il piano di Moebius $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, estendendo $\Pi_{\mathbf{n}}$ a $\overline{\Pi}_{\mathbf{n}}$, con l'azione su \mathbf{n} così definita:

$$\overline{\Pi}_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \infty, \quad \text{e} \quad \overline{\Pi}_{\mathbf{n}}^{-1}(\infty) = \mathbf{n}.$$

In modo analogo, si definisce la *proiezione stereografica* $\Pi_{\mathbf{s}}$ e $\Pi_{\mathbf{s}}^{-1}$ dal polo sud \mathbf{s} :

$$\Pi_{\mathbf{s}} : \begin{cases} S^2 \setminus \{\mathbf{s}\} & \longrightarrow & E_0 \simeq \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{1 + z_0}, \frac{y_0}{1 + z_0}, 0 \right) \end{cases}$$

e

$$\Pi_{\mathbf{s}}^{-1} : \begin{cases} E_0 \simeq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \\ (u, v, 0) & \longmapsto \end{cases} \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2} \right) .$$

Anche $\Pi_{\mathbf{s}}$ e $\Pi_{\mathbf{s}}^{-1}$ possono essere estese come le precedenti ad una biiezione $\bar{\Pi}_{\mathbf{s}}$ ed alla sua inversa $\bar{\Pi}_{\mathbf{s}}^{-1}$, tra S^2 ed $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Si noti che, se consideriamo la composizione

$$\Pi_{\mathbf{n}} \circ \Pi_{\mathbf{s}}^{-1} : \begin{cases} E_0 \setminus \{0\} \simeq (\mathbb{R}^2)^* & \longrightarrow \\ (u, v, 0) & \longmapsto \end{cases} \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}, 0 \right) ,$$

(che si può ottenere equivalentemente con la composizione $\Pi_{\mathbf{s}} \circ \Pi_{\mathbf{n}}^{-1}$).

Questa altro non è che l'*inversione circolare* Ω_0 di centro 0 e potenza 1.

Anche l'inversione circolare si può dunque estendere all'intero piano di Moebius $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, e tale estensione corrisponde alla composizione delle applicazioni estese $\bar{\Pi}_{\mathbf{n}} \circ \bar{\Pi}_{\mathbf{s}}^{-1}$, ottenendo:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_0(0) &= \bar{\Pi}_{\mathbf{n}} \circ \bar{\Pi}_{\mathbf{s}}^{-1}(0) = \bar{\Pi}_{\mathbf{n}}(n) = \infty, \\ \bar{\Omega}_0(\infty) &= \bar{\Pi}_{\mathbf{n}} \circ \bar{\Pi}_{\mathbf{s}}^{-1}(\infty) = \bar{\Pi}_{\mathbf{n}}(s) = 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che si possono definire in modo analogo proiezioni stereografiche dal polo nord \mathbf{n} sul piano tangente antipodale E_{-1} (di equazione $z = -1$), o dal polo sud \mathbf{s} sul piano antipodale E_1 (di equazione $z = 1$).

Si può facilmente provare che la proiezione stereografica (e la sua inversa) muta circonferenze sulla sfera S^2 in circonferenze e rette del piano \mathbb{R}^2 , in particolare vengono mutate in rette le circonferenze passanti per il polo di proiezione. Sia infatti \mathcal{C} una circonferenza su S^2 di equazioni

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} .$$

Allora $\Pi_{\mathbf{n}}(\mathcal{C})$ avrà equazioni

$$\begin{cases} a \frac{2u}{u^2+v^2+1} + b \frac{2v}{u^2+v^2+1} + c \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} + d = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

da cui

$$2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1) + d(u^2 + v^2 + 1) = 0,$$

ovvero

$$\begin{cases} (c + d)(u^2 + v^2) + 2au + 2bv + (d - c) = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

e questa è l'equazione di una circonferenza del piano E_0 , a meno che non sia $c + d = 0$, nel qual caso risultano le equazioni di una retta di E_0 : si noti che $c + d = 0$ significa $c = -d$, cioè il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ passa per \mathbf{n} e quindi la circonferenza \mathcal{C} passa per \mathbf{n} .

In conclusione, possiamo dire che la retta proiettiva complessa $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ammette le due ulteriori rappresentazioni geometriche:

- $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, ossia il piano di Moebius (identificato in modo naturale con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$);
- S^2 , ossia la 2-sfera (identificata attraverso la proiezione stereografica con $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$).

La struttura geometrica del piano di Moebius, costituita dalla famiglia delle rette e delle circonferenze euclidee, viene mutata (attraverso l'inversa della proiezione stereografica) nella struttura di S^2 costituita dalle circonferenze sezioni piane di S^2 , che ostituisce la cosiddetta *sfera di Riemann*, modello tridimensionale del piano di Moebius e della retta proiettiva complessa.

5.3.3 Le trasformazioni di Moebius

Abbiamo visto che l'inversione circolare è un'involuzione del *piano euclideo 'punctato'* (cioè, privato di un punto), che permuta la famiglia delle rette e delle circonferenze del piano.

Si può comunque estendere il dominio dell'inversione anche a comprendere il centro d'inversione \mathbf{o} , purchè vi si aggiunga un nuovo punto ∞ , definito come il corrispondente di \mathbf{o} , ottenendo così come dominio e codominio della nuova funzione (ancora bijectiva), che abbiamo indicato con $\bar{\Omega}_0$, l'insieme $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Applicando l'inversione fondamentale $\bar{\Omega}_0$ ad una generica retta di Moebius di equazione (5.3) si ottiene ancora una retta di Moebius di equazione

$$A + B(z + \bar{z}) + Ci(z - \bar{z}) + Dz\bar{z} = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Più in generale, si può osservare che ogni inversione circolare trasforma rette di Moebius in rette di Moebius, cioè è un automorfismo geometrico dello spazio $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$.

Vogliamo ora determinare tutti gli automorfismi geometrici dello spazio $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$. Se consideriamo una *trasformazione lineare fratta su \mathbb{C}* , ovvero, dati $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ con $ad - bc \neq 0$, la funzione

$$f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

tale che:

- se $c \neq 0$:

$$f : \begin{cases} z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} & \longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{C} \\ \frac{-d}{c} & \longmapsto \infty \\ \infty & \longmapsto \frac{a}{c} \end{cases}$$

- se $c = 0$:

$$f : \begin{cases} z \in \mathbb{C} & \longmapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \in \mathbb{C} \\ \infty & \longmapsto \infty \end{cases} .$$

In coordinate omogenee nella retta proiettiva complessa $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ otteniamo

$$\forall (z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^2)^*, \rho \in \mathbb{C}^* : f \left(\rho \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = \rho \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

con la condizione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Quindi il *gruppo delle trasformazioni lineari fratte su \mathbb{C}* , che denotiamo con $TLF(\mathbb{C})$, è isomorfo al gruppo $\text{PGL}(\mathbb{C}^2)$ delle *proiettività* (che sono tutte e sole le bijezioni che conservano i birapporti) di $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, gruppo che, a sua volta, è isomorfo a $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ che è il gruppo delle matrici 2×2 invertibili a coefficienti complessi, determinate a meno di un fattore di proporzionalità e viene detto *gruppo proiettivo*

lineare di dimensione 2 su \mathbb{C} ; esso coincide con il gruppo proiettivo speciale di dimensione 2 su \mathbb{C}

$$TLF(\mathbb{C}) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{C}) := \{\rho A : A \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}), \rho \in \mathbb{C}^*, \det(A) = 1\}.$$

Una proiettività f tale che

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

si può decomporre come segue:

se $c = 0$ si ha

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d};$$

se $c \neq 0$, allora

$$\frac{c(az + b) + ad - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}.$$

Se poniamo

$$z \xrightarrow{f_1} cz + d \quad z \xrightarrow{f_2} \frac{1}{z}, \quad z \xrightarrow{f_3} \frac{bc - ad}{c}z + \frac{a}{c},$$

otteniamo che $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Dunque f (nel caso in cui $c = 0$), f_1 , f_3 sono affinità dirette della retta proiettiva complessa (poichè sono trasformazioni lineari intere) che corrispondono alle similitudini del piano euclideo (che mutano rette in rette e circonferenze in circonferenze). Invece, f_2 è data dalla composizione del coniugio con l'inversione circolare Ω_0 , pertanto trasforma rette di Moebius in rette di Moebius.

Si può così concludere che ogni elemento di $TLF(\mathbb{C})$ muta rette di Moebius in rette di Moebius.

5.11 Definizione. Chiamiamo trasformazioni di Moebius gli automorfismi geometrici del piano di Moebius. Indicheremo l'insieme di tali trasformazioni con \mathcal{TM} .

Si prova che

$$\mathcal{TM} \simeq TLF(\mathbb{C}) \times \langle \bar{\cdot} \rangle \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \langle \bar{\cdot} \rangle \simeq \text{PSL}(\mathbb{C}^2) \times \langle \bar{\cdot} \rangle,$$

in cui l'ultimo costituisce il *gruppo delle proiettività e antiproiettività* della retta proiettiva complessa. Dato che $f_2 = \overline{\Omega}_0 \circ \bar{}$, segue che $\bar{} = \overline{\Omega}_0 \circ f_2$, con $f_2 \in TLF(\mathbb{C})$, allora possiamo affermare anche

$$\mathcal{TM} \simeq TLF(\mathbb{C}) \rtimes \langle \overline{\Omega}_0 \rangle \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rtimes \langle \overline{\Omega}_0 \rangle.$$

Risulta pertanto che le trasformazioni di Moebius, essendo composizioni di similitudini del piano euclideo con inversioni circolari, sono trasformazioni conformi.

5.4 Isometrie del piano iperbolico

Per la categoricità degli assiomi di piano iperbolico reale, lo studio completo di tale ente geometrico può essere condotto riferendosi ad un particolare modello. Pertanto, dopo aver descritto il modello di Poincaré $\mathbb{H}_2(\mathbb{R})$, ne utilizzeremo le semplici proprietà analizzate finora, sia di tipo euclideo che di tipo proiettivo, per determinarne il gruppo delle isometrie. Avremo in tal modo determinato, a meno di isomorfismi, il *gruppo delle isometrie del piano iperbolico reale*.

5.4.1 Il gruppo delle isometrie di $\mathbb{H}_2(\mathbb{R})$

Per determinare il gruppo delle isometrie di $\mathbb{H}_2(\mathbb{R})$, consideriamo il semipiano \mathbb{C}_+ immerso nella retta proiettiva complessa $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, identificata con $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, ossia col piano di Moebius: le trasformazioni di Moebius permutano la retta proiettiva complessa trasformando rette di Moebius in rette di Moebius. Se in particolare consideriamo quelle che fissano la retta reale \mathbb{R} (asse delle x) e, tra queste, quelle che fissano \mathbb{C}_+ (semipiano di Poincaré), troviamo esattamente gli automorfismi della struttura geometrica $(\mathbb{C}_+, \mathcal{R})$ del modello di Poincaré: infatti, essendo fissato l'asse delle x , vengono permutate fra loro le rette di Moebius ortogonali a tale asse, che corrispondono, per la parte contenuta in \mathbb{C}_+ , proprio alle rette del modello di Poincaré.

Cominciamo dunque col considerare le proiettività di $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ che fissano la retta reale: queste sono esattamente le proiettività reali che formano il gruppo $PGL(\mathbb{R}^2)$,

rappresentate dalle classi di proporzionalità di matrici del gruppo proiettivo lineare $PGL_2(\mathbb{R}) = \{\rho A : A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}), \rho \in \mathbb{R}^*, \det(A) = \pm 1\}$, dunque $PGL(\mathbb{R}^2)$ (risp. $PSL(\mathbb{R}^2)$) è isomorfo a $PGL_2(\mathbb{R})$ (risp. a $PSL_2(\mathbb{R})$).

Le proiettività reali sono di due tipi: quelle con la matrice associata a determinante negativo, che nel piano di Moebius scambiano i due semipiani aventi come origine l'asse delle x , cioè la retta reale, e quelle con matrice associata a determinante positivo, cioè quelle rappresentate dal sottogruppo $PSL_2(\mathbb{R})$, che li fissano:

$$PSL_2(\mathbb{R}) \leq PGL_2(\mathbb{R}) \leq PGL_2(\mathbb{C}) = PSL_2(\mathbb{C}).$$

Dunque tutte e sole le proiettività di $PSL(\mathbb{C}^2)$ che fissano \mathbb{C}_+ sono quelle di $PSL(\mathbb{R}^2)$, cioè equivalgono alle TLF(\mathbb{R}) reali, a determinante positivo.

Fra le rimanenti trasformazioni di Moebius che fissano la retta reale \mathbb{R} , osserviamo che la funzione 'reciproco' e il 'coniugio' scambiano i due semipiani, quindi non conservano \mathbb{C}_+ ; le uniche che soddisfano anche a questa condizione sono le inversioni circolari e le loro composizioni con una qualunque trasformazione di $TLF(\mathbb{R})$: tutte queste si possono ottenere componendo l'inversione fondamentale con le trasformazioni di $PSL_2(\mathbb{R})$. Pertanto possiamo dedurre che

$$\text{Isom}(\mathbb{H}_2(\mathbb{R})) \leq \text{Aut}(\mathbb{C}_+, \mathcal{R}) \simeq PSL_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \Omega_0 \rangle. \quad (5.4)$$

D'altra parte, ogni proiettività reale della retta proiettiva complessa conserva i birapporti reali (e tali sono quelli di quaterne di punti allineati su una medesima retta del primo o del secondo tipo del modello di Poincaré) e, di conseguenza, conserva la distanza iperbolica; la stessa cosa vale, come abbiamo già osservato, anche per l'inversione circolare, dunque possiamo concludere:

$$PSL_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \Omega_0 \rangle \lesssim \text{Isom}(\mathbb{H}_2(\mathbb{R})).$$

Abbiamo così ottenuto la completa determinazione del gruppo delle isometrie del piano iperbolico, che si fattorizza come segue:

$$\text{Isom}(\mathbb{H}_2(\mathbb{R})) = PSL_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \Omega_0 \rangle \simeq PSL_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \cdot \rangle = PGL_2(\mathbb{R}). \quad (5.5)$$

Inoltre il sottogruppo normale (che, come è noto, è un *gruppo semplice*) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ rappresenta le isometrie dirette (prodotti di un numero pari di simmetrie assiali), mentre il laterale $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \circ \Omega_0$ rappresenta le isometrie inverse (prodotti di un numero dispari di simmetrie assiali).

5.4.2 Isometrie dirette

Vogliamo ora classificare le isometrie dirette del piano iperbolico $\mathbb{H}_2(\mathbb{R})$ in relazione ai punti uniti nel piano di Moebius, ovvero nella retta proiettiva complessa.

Come è noto, i punti uniti in una proiettività reale della retta proiettiva complessa sono in corrispondenza con gli autovalori della matrice che rappresenta la proiettività (determinata a meno di un fattore di proporzionalità complesso non nullo), e tali autovalori, essendo le radici dell'equazione caratteristica di una matrice reale 2×2 , sono le soluzioni di un'equazione di secondo grado a coefficienti reali. Dunque possiamo avere due punti uniti reali e distinti, reali e coincidenti o complessi e coniugati.

(1) *Due punti uniti reali e distinti* $u, v \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Abbiamo una *traslazione iperbolica*. Sia che $u, v \in \mathbb{R}$ sia che $u \in \mathbb{R}$ e $v = \infty$, la retta $\overline{u, v}$ rimane unita ed è l'unica retta unita. Possiamo dire dunque che, se $u, v \in \mathbb{R}$, un punto $p \in \overline{u, v} \in \mathcal{R}_2$ “trasla lungo” l'arco di circonferenza euclidea passante per u, v e p e contenuto in \mathbb{C}_+ (retta del secondo tipo); se $u \in \mathbb{R}$ e $v = \infty$, il punto $p \in \overline{u, v} \in \mathcal{R}_1$ trasla lungo la semiretta euclidea $\overline{u, p}$ (retta del primo tipo). Per ogni coppia di punti impropri u, v , possiamo considerare il sottogruppo di isometrie costituito da tutte le traslazioni iperboliche di retta unita $\overline{u, v}$: tale sottogruppo determinerà nel modello di piano iperbolico una famiglia di *orbite*, che sono le curve luogo dei punti trasformati di un punto assegnato sotto l'azione di tale sottogruppo. Le orbite di ciascuno di tali sottogruppi di traslazioni iperboliche vengono chiamate *ipercicli*.

Vediamo come son fatti gli ipercicli nel modello di Poincaré. Se $u, v \in \mathbb{R}$, ogni punto del modello trasla lungo un'orbita costituita dall'arco (contenuto nel semipiano) di circonferenza euclidea passante per quel punto e per i punti

u e v (fascio ellittico di circonferenze, di punti base u, v). Se $u \in \mathbb{R}$ e $v = \infty$ le orbite sono le semirette euclidee passanti per u contenute nel semipiano.

(2) *Due punti uniti coincidenti* $u \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Abbiamo una *rotazione limite di centro* u , punto improprio, che quindi nel piano iperbolico non ha punti uniti. Per ogni punto improprio u , possiamo considerare anche qui le orbite, chiamate *oricicli*, relative al sottogruppo di rotazioni limite di centro u . Se $u \in \mathbb{R}$, ogni punto del modello di Poincaré ruota su un'orbita costituita dalla circonferenza euclidea passante per quel punto e tangente in u all'asse x . Se $u = \infty$ le orbite sono le rette euclidee orizzontali e le rotazioni limite agiscono sui punti del modello esattamente come traslazioni euclidee orizzontali.

(3) *Due punti uniti complessi e coniugati* u e \bar{u} . Abbiamo le *rotazioni iperboliche*, quindi con un solo punto unito in \mathbb{C}_+ , per esempio u , che risulta il *centro di rotazione*. Per ogni $p \in \mathbb{C}_+$, $p \neq u$, l'orbita, chiamata *ciclo* di p sotto l'azione del sottogruppo di rotazioni iperboliche di centro u è la *circonferenza iperbolica di centro* u e *raggio* $d_H(u, p)$, cioè il luogo dei punti a distanza iperbolica costante (e pari a $d_H(u, p)$) dal punto u . Per determinare tale luogo da un punto di vista euclideo dobbiamo distinguere due casi: la retta iperbolica $\overline{u, p} \in \mathcal{R}_2$, oppure $\overline{u, p} \in \mathcal{R}_1$. Nel primo caso, sia $c = \overline{u, \bar{u}} \cap P$, essendo P la tangente (euclidea) in p alla retta (iperbolica) $\overline{u, p}$: la circonferenza iperbolica da determinare risulta coincidere con la circonferenza euclidea di centro c e raggio $d_\varepsilon(c, p)$

Nel secondo caso, per tracciare la circonferenza iperbolica di centro u e raggio $d_H(u, p)$, basterà determinare il punto q , ulteriore intersezione di tale circonferenza con la retta $\overline{u, p}$, cioè il secondo punto q della retta in questione tale che $d_H(u, p) = d_H(u, q)$: ricordando la definizione di distanza iperbolica fra punti appartenenti alle rette del primo tipo, si verifica subito che tale punto q risulta determinato dal fatto che la sua parte immaginaria (cioè, l'ordinata in \mathbb{R}^2) è terza proporzionale dopo le parti immaginarie di p ed u . L'orbita sarà allora tracciabile come circonferenza euclidea passante per p e q e centro il loro punto medio.

5.4.3 L'inversione circolare nel modello di Poincaré

Analizziamo ora l'azione dell'inversione fondamentale sulle rette verticali e sulle circonferenze ortogonali all'asse x del piano euclideo (identificato con l'asse \mathbb{R} in \mathbb{C}) che, come abbiamo visto, sono coinvolte nella definizione delle rette del modello di Poincaré: ripercorriamo quindi, in questa situazione particolare, il procedimento seguito nel paragrafo (5.3.1).

Una circonferenza ortogonale all'asse x ha equazione $(x - a)^2 + y^2 = r^2$. Moltiplicando per $A \in \mathbb{R}$ e ponendo $D = -Ar^2$ si ottiene $A(x - a)^2 + Ay^2 + D = 0$ ovvero

$$A(x^2 + y^2) - 2Aax + B = 0. \quad (5.6)$$

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Allora $\operatorname{Re}(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ (e inoltre $\operatorname{Im}(z) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$), pertanto l'equazione (5.6) diventa

$$Az\bar{z} - C(z + \bar{z}) + B = 0, \quad \text{con } B = D + Aa^2 \text{ e } C = Aa. \quad (5.7)$$

L'equazione (5.7) rappresenta, nel piano \mathbb{R}^2 , una retta verticale per $A = 0$, e una circonferenza con il centro sull'asse x per $A \neq 0$, quindi se supponiamo $y > 0$ l'equazione (5.7) rappresenta la generica retta del modello del semipiano di Poincaré. Applichiamo l'inversione circolare fondamentale che trasforma ogni $z \neq 0$ in $1/\bar{z}$. L'equazione (5.7) diventa:

$$\frac{A}{z\bar{z}} - C \frac{(z + \bar{z})}{z\bar{z}} + B = 0,$$

ovvero

$$A - C(z + \bar{z}) + Bz\bar{z} = 0.$$

Dunque l'inversione fondamentale agisce come una permutazione sulla famiglia delle rette del modello di Poincaré.

In particolare, si può osservare che:

- (a) ponendo $A = 0$ e $B \neq 0$, si ottiene che le rette verticali diverse dall'asse y si trasformano in semicirconferenze;

- (b) ponendo $A = 0$ e $B = 0$, si ottiene che l'asse delle y è una retta unita;
- (c) ponendo $A \neq 0$ e $B = 0$, si ottiene che le semicirconferenze per o si trasformano in rette verticali;
- (d) ponendo $A \neq 0$ e $B \neq 0$, si ottiene che le semicirconferenze non per o si trasformano in semicirconferenze.

5.4.4 Simmetrie assiali e isometrie inverse nel modello di Poincaré

Per quanto riguarda le isometrie inverse, ricordiamo che, a norma del teorema (4.14), ogni isometria inversa risulta essere prodotto di un numero dispari (al più tre) simmetrie assiali, e dunque prodotto di un'isometria diretta per una simmetria assiale: studieremo pertanto le *simmetrie assiali*, che rivestono un ruolo chiave in tutta quest'analisi, essendo i generatori di tutto il gruppo delle isometrie.

Se si considera una retta $R \in \mathcal{R}_1$, risulta subito chiaro che la simmetria assiale (iperbolica) rispetto ad R coincide con la simmetria assiale euclidea rispetto alla retta euclidea di cui R è parte. Questa infatti è un'isometria euclidea non identica e poichè, come abbiamo visto, la distanza iperbolica d_H si esprime in termini di distanza euclidea d_ε , la restrizione di tale simmetria assiale al modello di Poincaré risulta essere un'isometria iperbolica non identica con un retta di punti fissi.

Se si considera poi una retta $R \in \mathcal{R}_2$, la simmetria assiale (iperbolica) rispetto ad R coincide con la restrizione al modello di Poincaré dell'inversione circolare rispetto alla circonferenza euclidea di cui R è parte. Infatti tale inversione circolare agisce sul piano iperbolico come una trasformazione non identica con un retta di punti fissi. Inoltre, come abbiamo visto, essa è ottenuta dalla composizione della funzione 'reciproco' e della funzione 'coniugio': la prima conserva i birapporti (essendo una proiettività della retta proiettiva complessa) e il coniugio (che è un'antiproiettività di $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$) conserva i birapporti reali, dunque la loro composizione conserva i birapporti reali, pertanto conserva la distanza iperbolica.

In base alla proposizione (4.13) possiamo pertanto affermare che le simmetrie rispetto a semirette verticali e le inversioni rispetto a semicirconferenze ortogonali

all'asse x , se ristrette al modello di Poincaré, agiscono come simmetrie assiali del piano iperbolico.

Viceversa, risulta un semplice esercizio verificare che ogni simmetria assiale del modello è necessariamente uno di questi due tipi di isometrie.

Possiamo allora concludere che *le restrizioni al semipiano di Poincaré delle simmetrie (euclidee) rispetto a semirette verticali e delle inversioni circolari (euclidee) con centro sull'asse delle x sono tutte e sole le simmetrie assiali (iperboliche) del modello considerato*

Aggiungiamo infine la seguente osservazione che mostra quanto sia stretto il legame tra inversioni circolari e simmetrie assiali euclidee:

5.12 Osservazione. *Se si considera l'azione dell'inversione rispetto ad una circonferenza S con il centro posto sull'asse x e tangente all'asse y , si ottiene*

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}^* : \Omega_S(z) &= (\tau_r \circ \Omega_0 \circ \tau_{-r})(z) = (\tau_r \circ \Omega_0)(z - r) = \\ &= \frac{r^2}{(z - r)} + r = \frac{r^2 + r(\bar{z} - r)}{\bar{z} - r} = \frac{r\bar{z}}{\bar{z} - r}. \end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r\bar{z}}{\bar{z} - r} = -\bar{z},$$

ovvero se $r \rightarrow +\infty$ l'applicazione $\Omega_S(z)$ diventa la simmetria rispetto all'asse y (coerentemente con il fatto che, se il raggio tende a crescere all'infinito, la circonferenza S 'tende' alla circonferenza generalizzata costituita dall'asse y e dalla retta impropria).

Capitolo 6

Il piano ellittico reale

6.1 Dalla geometria sferica al piano ellittico

Per costruire un modello di piano ellittico reale (per tale piano stavolta non ci soffermeremo sulla trattazione assiomatica ma introdurremo direttamente un modello), consideriamo innanzi tutto la sfera unitaria $S^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ immersa in \mathbb{R}^3 .

Prendiamo come *punti* e *rette* della *geometria sferica* rispettivamente i punti e le circonferenze massime della sfera: si verifica però immediatamente che stavolta non si ottiene uno spazio lineare perchè per due punti diametralmente opposti passano infinite rette. Per questo motivo, dopo aver introdotto sulla sfera tale struttura geometrica ed anche una metrica, che costituiscono per l'appunto la geometria sferica, mostreremo come da questa si possa poi ottenere una struttura di piano lineare metrico (e ordinato, con un ordinamento diverso da quello del piano assoluto: sarà un ordinamento di tipo proiettivo, su cui non ci soffermeremo), che verrà detto *piano ellittico*.

Un'altra proprietà notevole delle rette sferiche è che esse a due a due hanno sempre intersezione, anzi, due rette distinte hanno esattamente due punti in comune, diametralmente opposti: non possono esistere quindi rette in qualche modo “parallele”.

Definiamo su S^2 la *distanza sferica* tra due punti $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^2$ nel seguente modo:

$$d_{S^2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \min\{\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}\}$$

in cui $\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$ denota la lunghezza di un arco di circonferenza massima di estremi \mathbf{p} e \mathbf{q} . Risulta pertanto:

$$\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in S^2 : d_{S^2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2 \arcsin \frac{1}{2} d_\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

dove d_ε è la distanza euclidea in \mathbb{R}^3 .

Essendoci questa corrispondenza, si ricava subito che due coppie di punti hanno la stessa distanza sferica se e solo se hanno la stessa distanza euclidea.

Ne segue in particolare che il luogo dei punti di S^2 che sono equidistanti da due punti dati coincide con l'intersezione della sfera con il luogo dei punti di \mathbb{R}^3 equidistanti dai due punti stessi, e quindi è l'intersezione di S^2 con il piano assiale del segmento che congiunge i due punti nello spazio (piano perpendicolare al segmento nel suo punto medio): tale luogo è dunque la circonferenza massima, o retta sferica ortogonale a quella che congiunge sulla sfera i due punti dati e passante per i punti medi dei due archi aventi i due punti come estremi: chiameremo anche in geometria sferica tale luogo *l'asse della coppia di archi di retta sferica* individuati dai due punti dati.

Viceversa, ogni retta sferica si può ottenere come asse di una opportuna coppia di archi di circonferenza massima, e dunque anche in geometria sferica le rette ammettono una caratterizzazione di natura puramente metrica, il che implica che le isometrie dello spazio metrico (S^2, d_{S^2}) preservino automaticamente la struttura geometrica.

Va però osservato che, anche se le nozioni di perpendicolare ad una retta sferica in un suo punto e di asse di un segmento sferico (inteso come arco di circonferenza massima) rimangono pressochè invariate rispetto alle analoghe nozioni introdotte nel piano assoluto, e così pure le relative proprietà (come l'esistenza ed unicità della perpendicolare ad una retta data in *suo* punto dato), non si può dire lo stesso della perpendicolare ad una retta per un punto non appartenente alla retta stessa. In geometria sferica si perde in generale l'unicità, come si può osservare considerando il caso di una retta sferica e di uno dei due punti (fra loro diametralmente opposti) che si trovano sul diametro ortogonale al piano che sega sulla sfera la retta stessa: per tale coppia di punti passano infatti infiniti piani che segano sulla sfera infinite

rette ortogonali alla retta data.

6.2 Isometrie della sfera in \mathbb{R}^3

Dalla correlazione che abbiamo messo in evidenza fra la distanza sferica e la distanza euclidea in \mathbb{R}^3 segue facilmente che ogni isometria di \mathbb{R}^3 che muta in sè la sfera S^2 (e quindi necessariamente ne fissa il centro, che è l'origine $\mathbf{0}$) induce un'isometria della sfera. Viceversa, si prova che ogni isometria della sfera si può estendere ad un'unica isometria di \mathbb{R}^3 che fissa $\mathbf{0}$.

Possiamo dunque scrivere:

$$\text{Isom}(S^2, d_{S^2}) = \{\mu|_{S^2} \mid \mu \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)\}$$

Ricordiamo che il gruppo degli operatori ortogonali $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ è isomorfo al gruppo delle matrici ortogonali

$$O_3(\mathbb{R}) = \{H \in \text{Mat}_3(\mathbb{R}) \mid H^{-1} = H^t\}.$$

Riportiamo alcune fondamentali proprietà del gruppo $O_3(\mathbb{R})$:

1) Denotando con A la generica matrice appartenente a $O_3(\mathbb{R})$, si ha che

$$\det(A) = \pm 1$$

2) Gli autovalori di A hanno necessariamente modulo 1 e, poichè il polinomio caratteristico di A , essendo di grado tre, ammette una radice reale, A ammette almeno un autovalore reale λ , e risulta

$$\lambda = \pm 1$$

3) Se \mathbf{v} è un autovettore associato all'autovalore λ si ha che:

$$L_A(\langle \mathbf{v} \rangle) = \langle \mathbf{v} \rangle$$

dunque $(L_A)|_{\langle \mathbf{v} \rangle}$ è un'omotetia vettoriale di caratteristica λ , inoltre:

$$L_A(\mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v}^\perp$$

infatti sia $\mathbf{w} \in \mathbf{v}^\perp$

$$\lambda(L_A(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}) = L_A(\mathbf{w}) \cdot \lambda\mathbf{v} = L_A(\mathbf{w}) \cdot L_A(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$$

dunque $(L_A)|_{\mathbf{v}^\perp}$ è un operatore ortogonale che opera su un piano (con matrice associata $A' \in O_2(\mathbb{R})$), e la matrice A sarà simile ad una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Il gruppo delle matrici ortogonali di ordine 3 risulta per il punto 1) ripartito in due sottoinsiemi disgiunti:

$$O_3(\mathbb{R}) = O_3^+(\mathbb{R}) \dot{\cup} O_3^-(\mathbb{R})$$

dove $O_3^+(\mathbb{R})$, anche indicato con $SO_3(\mathbb{R})$, costituito dalle matrici con determinante 1, è un sottogruppo normale di $O_3(\mathbb{R})$; mentre $O_3^-(\mathbb{R})$ costituisce il laterale formato dalle matrici con determinante -1 .

Analizziamo ora più da vicino i due sottoinsiemi disgiunti:

1) $SO_3(\mathbb{R})$

- se $\lambda = 1$, la matrice A' avrà determinante $= 1$ (cioè $A' \in SO_2(\mathbb{R})$), quindi A sarà, a meno di un cambiamento di base, della forma:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e tra queste matrici c'è la matrice identica I (per $\vartheta = 0$).

- se $\lambda = -1$, la matrice A' avrà determinante $= -1$ (cioè $A' \in O_2^-(\mathbb{R})$) e, ricordando che tutte le matrici $\in O_2^-(\mathbb{R})$ sono simili a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, A sarà, a meno di un cambiamento della base, una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia nel primo che nel secondo caso, la matrice A rappresenta una *rotazione* di \mathbb{R}_3 di angolo ϑ , con $\vartheta = \pi$ nel secondo caso, attorno ad una retta vettoriale (asse della

rotazione).

2) $O_3^-(\mathbb{R})$

- se $\lambda = 1$, la matrice A' avrà determinante $= -1$ (cioè $A' \in O_2^-(\mathbb{R})$) e, per il punto precedente, A sarà simile a una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che rappresenta la *simmetria rispetto ad un piano* (il piano xz in questo caso);

- se $\lambda = -1$, la matrice A' avrà determinante $= 1$ (cioè $A' \in SO_2(\mathbb{R})$), quindi A potrà essere scritta nella forma:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

le matrici di questo tipo rappresentano isometrie dette *antirotazioni*, ottenute per composizione di una simmetria rispetto a un piano con una rotazione attorno ad un'asse perpendicolare al piano stesso.

Caso particolare di antirotazione è, per $A' = I_2$, la simmetria rispetto ad un piano (il piano xy in questo caso), mentre, per $A' = -I_2$, si ottiene la simmetria centrale di \mathbb{R}_3 , con matrice $A = -I$ (indicando con I la matrice identica I_3).

Dunque l'uguaglianza che abbiamo precedentemente scritto diventa:

$$O_3(\mathbb{R}) = SO_3(\mathbb{R}) \rtimes \langle -I \rangle.$$

In termini di operatori ortogonali, quest'ultima uguaglianza si esprime:

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^3) \cup \mathcal{O}^-(\mathbb{R}^3) = \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^3) \rtimes \langle \Sigma_0 \rangle$$

dove $\Sigma_0 = L_{(-I)}$; gli operatori appartenenti a $\mathcal{O}^+(\mathbb{R}^3)$ sono detti *isometrie (vettoriali) dirette*, mentre quelli appartenenti a $\mathcal{O}^-(\mathbb{R}^3)$ sono detti *isometrie inverse*.

Esercizio 3. Determinare i punti fissi sulla sfera di ciascun tipo di isometrie di S^2 , viste come restrizioni di rotazioni, antirotazioni proprie e simmetrie rispetto a piani vettoriali di \mathbb{R}^3 .

6.3 Il piano ellittico reale e le sue isometrie

6.1 Definizione. Due punti \mathbf{p} e $\mathbf{q} \in S^2$ si dicono antipodali se $\mathbf{p} = -\mathbf{q}$; indichiamo con $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$ se $\mathbf{p} = \pm \mathbf{q}$. In tal modo si definisce una relazione d'equivalenza su S^2 , detta identificazione dei punti antipodali.

Si noti che, se $[\mathbf{p}]_{\sim}$ denota la classe di equivalenza costituita dai punti \mathbf{p} e $-\mathbf{p}$ di S^2 , risulta che $[\mathbf{p}]_{\sim}$ è l'intersezione della sfera con il sottospazio unidimensionale $\langle \mathbf{p} \rangle$ di \mathbb{R}^3 , che corrisponde ad un punto del piano proiettivo reale $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Viceversa, ad ogni punto $\langle \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si associa univocamente la classe $[\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|]_{\sim}$.

Si stabilisce in tal modo una bijezione fra l'insieme quoziente $S^2/\sim = \{[\mathbf{p}]_{\sim} \mid \mathbf{p} \in S^2\}$ e l'insieme dei punti di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

6.2 Definizione. Definiamo il piano ellittico reale $Ell(\mathbb{R})$ nel seguente modo:

$$Ell : \begin{cases} \mathcal{P} = S^2/\sim = \{[\mathbf{p}]_{\sim} \mid \mathbf{p} \in S^2\} \\ \mathcal{R} = \{[\mathbf{p}]_{\sim} \mid \mathbf{p} \in \pi\} \mid \mathbf{0} \in \pi \\ d_{Ell} = (d_{S^2})_{\sim} \end{cases}$$

dove π indica un generico piano di \mathbb{R}^3 . Si noti che la distanza sferica d_{S^2} induce una distanza ellittica d_{Ell} che risulta ben definita sulle classi di equivalenza di coppie di punti antipodali.

L'insieme dei punti del piano proiettivo reale risulta dunque in corrispondenza biunivoca con \mathcal{P} ; ma possiamo dire lo stesso per l'insieme delle rette di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ed \mathcal{R} appena definito: basta infatti considerare che la bijezione che associa ad ogni coppia di punti antipodali della sfera S^2 immersa in \mathbb{R}^3 la retta vettoriale di \mathbb{R}^3 stesso passante per la coppia data, considerata come punto del piano proiettivo reale $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ fa corrispondere ad ogni circonferenza massima di S^2 (sezione piana della sfera) il piano vettoriale che la determina, considerato come retta del piano proiettivo reale. Dunque, come spazio geometrico $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ il piano ellittico reale $Ell(\mathbb{R})$ si identifica col piano proiettivo reale $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

In particolare, risulta essere uno spazio lineare in cui ogni coppia di rette distinte ha intersezione non vuota.

Osserviamo che tale identificazione vale anche dal punto di vista topologico: si può

infatti provare che $Ell(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, ciascuno con la topologia indotta per quoziente, risultano omeomorfi.

Infine, per determinare le isometrie del piano ellittico, basterà partire dalle isometrie della sfera studiate nella sezione precedente ed analizzare la loro azione sulle classi di equivalenza costituite da coppie di punti antipodali: osserviamo subito che su tali classi, che sono i punti del piano ellittico, la simmetria centrale agisce come l'identità; anzi, se si denota con

$$\mu_{\sim} : \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ [\mathbf{p}]_{\sim} \longmapsto [\mu(\mathbf{p})]_{\sim} \end{cases} ,$$

si può stabilire un omomorfismo suriettivo

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{O}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \text{Isom}(Ell) \\ \mu \longmapsto \mu_{\sim} \end{cases}$$

il cui nucleo è $\text{Ker}(\psi) = \{\pm I\} = \langle -I \rangle$.

Risulta pertanto che:

$$\text{Isom}(Ell) \cong O_3(\mathbb{R}) / \langle -I \rangle \cong SO_3(\mathbb{R}).$$

Le isometrie del piano ellittico sono pertanto esclusivamente di un tipo: rotazioni. Queste avranno un solo punto fisso a meno che non siano involutorie, ed in questo caso avranno una retta di punti fissi più un punto fisso non appartenente alla retta. Tali considerazioni si ricavano facilmente analizzando l'azione delle isometrie della sfera sullo spazio quoziente, e la verifica viene lasciata come Esercizio al lettore.

Indice analitico

$(\mathcal{P}; \mathcal{F}) \simeq (\mathcal{P}'; \mathcal{F}')$, 17

$B(x, r)$, 7

$N \triangleleft G$, 39

$PGL_2(\mathbb{R})$, 84

$A(\mathbb{K}^2)$, 9

$AL_2(\mathbb{K})$, 27

$AGL_2(\mathbb{K})$, 28

$\text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{F})$, 26

\mathbb{C}_+ , 70

$\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, 38

$\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, 38

$O_2^+(\mathbb{R})$, 39

$O_2^-(\mathbb{R})$, 39

$O_2(\mathbb{R})$, 35

Ω_R , 75

$PGL_2(\mathbb{C})$, 81

$PSL_2(\mathbb{C})$, 82

$SO_2(\mathbb{R})$, 39

$\mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$, 38

∂S , 8

\overleftarrow{R}_u , 57

\overline{S} , 23

$\mathcal{A}ff^+(\mathbb{C})$, 53

$\mathcal{G}(\mathcal{T}(\mathbb{R}^2), \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$, 47

ω_r , 53

$\rho_{\mathbf{o}, \vartheta}$, 40

σ_R , 41, 44

\overrightarrow{R}_u , 57

d_H , 70

affinit , 19

 dirette, 54

 inverse, 54

 lineare, 27

 semilineare, 28

angoli congruenti, 58

angolo, 57

 di parallelismo, 66

anti-omotetia, 54

antiaffinit , 54

applicazione

 indotta, 22

 semilineare, 21

asse

 della simmetria, 41

chiusura di S , 8, 23

ciclo, 86

collineazione, 19, 25

coordinate polari, 61

distanza, 7

 iperbolica, 70

distanza sferica, 90

- fascio asintotico, 68
- frontiera di S , 8
- funzione
 - continua, 18
- geometria sferica, 90
- gruppo
 - strutturale, 26
- h-punto improprio, 68
- inversione circolare, 75
- ipercicli, 85
- isom-piano-euclideo, 38
- isometria, 18
 - vettoriale, 35
- isomorfismo
 - geometrico, 17
 - semilineare, 21
- lati, 57
- lati di un triangolo, 58
- matrice
 - ortogonale, 35
- metrica, 7
- misura in radianti, 58
- modello di Poincaré, 71
- omeomorfismo, 18
- omotetia vettoriale, 53
- operatori ortogonali, 35
- oricli, 86
- Orientazione, 44
- palla aperta, 7
- piano
 - affine su \mathbb{K} , 9
 - assoluto reale, 58
 - di Moebius, 74
 - ellittico reale, 90
 - euclideo reale, 34
 - iperbolico reale, 59, 65
- piano ellittico reale, 95
- prodotto
 - semidiretto, 39
- proiezione stereografica, 77
- punti, 6
- rango, 12
- retta proiettiva complessa, 74
- rette
 - asintotiche, 67
 - di Moebius, 74
 - h-parallele, 65
 - h-parallele in un verso, 67
 - iperparallele, 65
- rotazioni iperboliche, 86
- rotazioni limite, 86
- roto-omotetia, 54
- segmenti congruenti, 57
- segmento, 57
- semipiano, 57
- semiretta
 - di origine u , 57
- semirette

- asintotiche, 67
- sfera di Riemann, 80
- similitudine, 53
- simmetria assiale, 63
- sostegno, 6
- sottogruppo
 - normale, 39
- sottospazio
 - congiungente, 12
 - intersezione, 12
- spazi geometrici
 - equivalenti, 26
- spazio
 - geometrico, 6
 - lineare, 15
 - metrico, 7
 - proiettivo coordinatizzato, 13
 - semilineare, 15
 - topologico, 7
 - metrizzabile, 9
 - vettoriale, 11
- struttura
 - geometrica \mathcal{F} , 6
 - topologica, 7
- struttura metrica, 7
- topologia, 7
- trasformazione
 - lineare fratta, 81
- trasformazioni di Moebius, 82
- traslazioni iperboliche, 85
- triangolo, 58
- vertice, 57
- vertici di un triangolo, 58

Bibliografia

- [1] M. ABATE, *Geometria*, McGraw-Hill, Milano, 1996;
- [2] E. ARTIN, *Algebra geometrica*, Feltrinelli, Milano, 1971;
- [3] R. BAER, *Linear algebra and projective geometry*, Academic Press, New York, 1952;
- [4] L.M. BATTEN, *Combinatorics of finite geometries*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997;
- [5] E.D. BLOCH *A first course in geometric topology and differential geometry*, Birkhäuser, Boston, 1997;
- [6] P.J. CAMERON, *Projective and polar spaces*, QMW Maths Notes 13 (second edition), University of London, London, 2000;
- [7] G. CASTELNUOVO, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Soc. Ed. Dante Alighieri, Milano, 1969;
- [8] H.S.M. COXETER, *Non-euclidean geometry*, Toronto University Press, Toronto, 1968;
- [9] H.D. EBBINGHAUS, K. LAMOTKE, J.H. ERWING, *Numbers. With an introduction*, Springer Verlag, New York, 1990;
- [10] F. KLEIN, *Il programma di Erlangen. (Introduzione di E. Agazzi, traduzione a cura di A. Bernardo)*, La Scuola editrice, Brescia, 1998;
- [11] T.Y. LAM, *The algebraic theory of quadratic forms*, W.A.Benjamin, Reading, 1973;

- [12] R.C. LYNDON, *Groups and geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987;
- [13] E.E. MOISE, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley, Reading MA, 1974;
- [14] O.T. O'MEARA *Introduction to quadratic forms*, Springer Verlag, Berlin, 1973;
- [15] R. RAMSAY, R. RICHTMYER, *Introduction to hyperbolic geometry*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1995;
- [16] E. SERNESI, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1989;
- [17] E. SERNESI, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, 1991;
- [18] J. STILLWELL *Geometry of surfaces*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1992;
- [19] G. TALLINI, *Strutture geometriche*, Liguori editore, Napoli, 1991;
- [20] D.E. TAYLOR, *The geometry of the classical groups*, Sigma Series in Pure Maths, Heldermann Verlag, Berlin, 1992;