Algebra lineare – Geometria 1

10 aprile 2006

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R_3}[x]$ si considerino i sottoinsiemi

$$U = \{p(x) \in \mathbf{R_3}[x] \mid p(0) = 0\} \text{ e } V = \{p(x) \in \mathbf{R_3}[x] \mid p(x) = p(-x)\}$$

e la funzione $f\colon \mathbf{R_3}[x] \to \mathbf{R_3}[x]$ tale che $\forall p(x) \in \mathbf{R_3}[x]\ f(p(x)) = p(-x)$.

i) Si verifichi che U e V sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R_3}[x]$ e per ciascuno di essi si determini una base e la dimensione.

Esplicitiamo meglio il sottoinsieme U.
$U = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \mid p(0) = 0;\ a, b, c, d \in \mathbf{R}\} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a = 0\}$
$U = \{bx + cx^2 + dx^3 \mid b, c, d \in \mathbf{R}\}$
Sia $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ base per $\mathbf{R}_3[x]$.
Si ha che $U = \{bx + cx^2 + dx^3 \mid b, c, d \in \mathbf{R}\} = \langle x, x^2, x^3\rangle$, per cui $U \leq \mathbf{R}_3[x]$.
Risulta $B_U = \{x, x^2, x^3\}$ e $\dim U = 3$ (sono 3 i vettori della base).

***OSSERVAZIONE** – Ricordiamo che dim*$\mathbf{R}_3[x] = 4$ *e, in generale, dim*$\mathbf{K}_n[x] = n + 1$.

Esplicitiamo meglio il sottoinsieme V.
$V = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \mid p(x) = p(-x);\ a, b, c, d \in \mathbf{R}\} =$
$= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a + bx + cx^2 + dx^3 = a - bx + cx^2 - dx^3\} =$

$$\underset{princ.id.polin.}{=} \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid \begin{cases} b = -b \\ d = -d \end{cases} \Rightarrow b = d = 0\right\}.$$

$V = \{a + cx^2 \mid a, c \in \mathbf{R}\} = \langle 1, x^2\rangle \Rightarrow V \leq \mathbf{R}_3[x]$.
Risulta $B_V = \{1, x^2\}$ e $\dim V = 2$.

ii) Si costruiscano i sottospazi $U \cap V$ e $U + V$.

Costruiamo il sottospazio somma che, per definizione, è $U + V := \langle U \cup V\rangle =$
$= \langle x, x^2, x^3, 1, x^2\rangle$.
Sono cinque vettori, ma la dimensione di $\mathbf{R}_3[x]$ è 4. Si nota che il secondo e il quinto sono legati (in particolare sono uguali). Eliminando il quinto risulta

$$U + V = \langle x, x^2, x^3, 1\rangle = \mathbf{R}_3[x].$$

Dalla definizione di intersezione deriva che
$U \cap V = \{p(x) \in \mathbf{R}_3[x] \mid p(x) \in U \text{ e } p(x) \in V\} = \{p(x) \mid p(0) = 0 \text{ e } p(x) = p(-x)\} =$

$$= \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid \begin{cases} a = 0 \\ b = d = 0 \end{cases}\right\} = \{cx^2; c \in \mathbf{R}\} = \langle x^2 \rangle.$$

La formula di Grassman ($\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V$) suffraga il risultato ottenuto: $\dim(U \cap V) = 3 + 2 - 4 = 1$.

iii) Dopo avere verificato che f è un endomorfismo, se ne determini il nucleo Ker$f$ e l'immagine Imf e se ne scriva la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3[x]$.

Dominio e codominio di f coincidono, perciò, perché f sia endomorfismo, basta solo verificare che f è omomorfismo (pagina AL1).
Dobbiamo provare che, $\forall$ p(x), q(x) $\in \mathbf{R}_3[x]$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, si verifica che

$$f(\alpha \mathrm{p}(x)+\beta \mathrm{q}(x)) \overset{?}{=} \alpha f(\mathrm{p}(x)) + \beta f(\mathrm{q}(x))$$

Siano $\mathrm{p}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, $\mathrm{q}(x) = h + kx + lx^2 + mx^3$

$f(\alpha \mathrm{p}(x)+\beta \mathrm{q}(x)) = f(\alpha(a + bx + cx^2 + dx^3) + \beta(h + kx + lx^2 + mx^3)) =$
$= f(\alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 + \alpha dx^3 + \beta h + \beta kx + \beta lx^2 + \beta mx^3) =$
$= \alpha a - \alpha bx + \alpha cx^2 - \alpha dx^3 + \beta h - \beta kx + \beta lx^2 - \beta mx^3 =$

D'altra parte
$\alpha f(\mathrm{p}(x)) + \beta f(\mathrm{q}(x)) = \alpha f(a + bx + cx^2 + dx^3) + \beta f(h + kx + lx^2 + mx^3) =$
$= \alpha(a - bx + cx^2 - dx^3) + \beta(h - kx + lx^2 - mx^3) =$
$= \alpha a - \alpha bx + \alpha cx^2 - \alpha dx^3 + \beta h - \beta kx + \beta lx^2 - \beta mx^3$.

Perciò f è endomorfismo.

In luogo di calcolare subito, secondo le definizioni, i sottospazi ker$f$ e Imf, scriviamo prima la matrice dell'endomorfismo. Ricaveremo poi da essa informazioni su nucleo e immagine.

Abbiamo già visto che la base canonica per $\mathbf{R}_3[x]$ è $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
Per scrivere la matrice dell'endomorfismo rispetto alla base canonica, calcoliamo le immagini dei singoli vettori della base e le rappresentiamo in componenti rispetto alla base stessa, come vettori di $\mathbf{R}^4$:
$f(1) = 1 = (1,0,0,0)$;
$f(x) = -x = (0,-1,0,0)$;
$f(x^2) = x^2 = (0,0,1,0)$;
$f(x^3) = -x^3 = (0,0,0,-1)$.

La matrice risulta pertanto $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, con det A = 1.

Il rango di A è perciò 4 e, per il teorema della "nullità + rango" di pagina AL17, rappresenta la dimensione di Imf, mentre il corango risulta 0 e rappresenta la dimensione di ker$f$. Diretta conseguenza di ciò, è che

$$\ker f = \{\underline{0}\}; \qquad \mathrm{Im}\, f = \mathbf{R}_3[x].$$

iv) Si costruiscano i sottospazi $f(U)$ e $f(V)$ e si stabilisca se sono uno complemento diretto per l'altro.

Ci risulta comodo aver già scritto, al punto precedente la matrice di f.

$$f(U) = \{f(\mathrm{p}(x)) \mid \mathrm{p}(x) \in U\} = \{f(ax + bx^2 + cx^3) \mid a, b, c \in \mathbf{R}\} =$$
$$\underset{propr.endom.}{=} \{af(x) + bf(x^2) + cf(x^3)\} = \langle f(x), f(x^2), f(x^3)\rangle = \langle -x, x^2, -x^3\rangle \text{ e } \dim f(U) = 3.$$

$$f(V) = \{f(\mathrm{p}(x)) \mid \mathrm{p}(x) \in V\} = \{f(a + bx^2) \mid a, b \in \mathbf{R}\} \underset{propr.endom.}{=} \{af(1) + bf(x^2)\} =$$
$$= \langle f(1), f(x^2)\rangle = \langle 1, x^2\rangle = V \text{ e } \dim f(V) = 2.$$

Ricordiamo che $f(U)$ e $f(V)$ sono l'uno complemento diretto dell'altro quando la loro somma genera l'intero spazio e la loro intersezione si riduce al solo vettor nullo:

$$f(U) \oplus f(V) = \mathbf{R}_3[x] \iff f(U) + f(V) = \mathbf{R}_3[x] \text{ e } f(U) \cap f(V) = \{\underline{0}\}.$$

Possiamo osservare che la seconda condizione cade in quanto $\dim f(U) + \dim f(V) = = 3 + 2 = 5 \neq 4 = \dim \mathbf{R}_3[x]$, il che implica, per la formula di Grassman, che $\dim(f(U) \cap f(V)) = 1$.

Possiamo in alternativa osservare che anche la seconda condizione cade in quanto si nota che c'è un vettore di base, x^2, comune ad entrambi i sottospazi. Perciò $f(U)$ e $f(V)$ non sono in somma diretta.

2) Si consideri l'endomorfismo f : $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che, se $B = (e_1, e_2, e_3)$ è la base canonica, si abbia:

$$f(e_3) = e_1 + 3e_3\ ,\ f(e_1 - e_3) = -2\,e_3,\ f(-2e_1 + e_2 - e_3) = 2e_2 + e_3.$$

i) Si scriva come agisce l'endomorfismo f sul generico vettore $v = (x, y, z)$ di $\mathbf{R}^3$ e si costruisca la matrice di f rispetto alla base canonica.

Vediamo innanzitutto come agisce l'endomorfismo sui vettori della base canonica:

$$f(e_1) = f(e_1 - e_3 + e_3) = f(e_1 - e_3) + f(e_3) = -2e_3 + e_1 + 3e_3 = e_1 + e_3;$$
$$f(e_2) = f(-2e_1 + e_2 - e_3 + 2e_1 + e_3) = f(-2e_1 + e_2 - e_3) + 2f(e_1) + f(e_3) =$$
$$= 2e_2 + e_3 + 2e_1 + 2e_3 + e_1 + 3e_3 = 3e_1 + 2e_2 + 6e_3.$$

Siamo pertanto in grado di scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Vediamo ora come agisce l'endomorfismo sul generico vettore di $\mathbf{R}^3$ (consideriamolo vettore colonna). Risulta

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \mathrm{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + z \\ 2y \\ x + 6y + 3z \end{pmatrix}$$

Pertanto la funzione f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (x + 3y + z, 2y, x + 6y + 3z)$$

ii) Si costruiscano i sottospazi Imf e Ker$f$; per ciascuno di essi si determinino una base e la dimensione.

Per il teorema "nullità + rango" ragioniamo sul rango della matrice M.

$$\det \mathrm{M} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg\ M} = 3$$

Il rango di M rappresenta la dimensione dell'immagine di f: rg M = dim(Imf).
Il corango (corg M := dim($\mathbf{R}^3$) – rg M) rappresenta la dimensione del nucleo di f: corg M = dim(ker$f$).

Perciò dim(Imf) = 3 $\Rightarrow$ Imf = $\mathbf{R}^3$ e base per Imf è la base canonica di $\mathbf{R}^3$.
E dim(ker$f$) = 3 – 3 = 0 $\Rightarrow$ ker$f$ = $\underline{0}$, che non ammette base.

***OSSERVAZIONE** – Se il rango della matrice non fosse stato 3 (i. e.* Im*f e* ker*f non si fossero ridotti rispettivamente all'intero spazio e al vettor nullo) avremmo dovuto, secondo la definizione, costruirli. Per* Im*f avremmo considerato l'immagine dei singoli vettori della base canonica e avremmo tolto quello/i legato/i. Per il nucleo, avremmo risolto un sistema lineare omogeneo che, oltre al vettor nullo, avrebbe ammesso autosoluzioni.*

iii) Si stabilisca se l'endomorfismo *f* è diagonalizzabile; in caso di risposta positiva, si diagonalizzi *f*.

Prima cosa da fare è studiare il polinomio caratteristico $p_{char}(\lambda) := \det(M - \lambda I)$.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 6 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right| = (2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)-1) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2).$$

Esso ammette 3 soluzioni distinte, ognuna con molteplicità algebrica 1:

$$\lambda_1 = 2; \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}; \qquad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}.$$

Esse, per il teorema di pagina E6, sono gli autovalori di *f*.

Ammettendo tre autovalori distinti, per la conseguenza del II criterio di diagonalizzabilità (pagina E17), *f* è diagonalizzabile.

Determiniamo il primo autospazio $V(\lambda_1) = V_2 := \{\underline{v} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\underline{v}) = \lambda_1 \underline{v} = 2\underline{v}\}$, che è lo spazio delle soluzioni del sistema $(M - \lambda_1 I)\underline{v} = \underline{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + 3y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + 6y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + z \\ x = -6y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + z \\ 9y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}z \\ y = -\frac{2}{9}z \\ z = z \end{cases}$$

Per cui l'autospazio risulta $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Determiniamo il secondo autospazio $V(\lambda_2) = V_{2-\sqrt{2}}$.

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 6 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-1+\sqrt{2})x + 3y + z = 0 \\ \sqrt{2}y = 0 \\ x + 6y + (1+\sqrt{2})z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -(\sqrt{2}+1)z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -(\sqrt{2}+1)z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

Per cui l'autospazio risulta $V_{2-\sqrt{2}} = \left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Determiniamo il terzo autospazio $V(\lambda_3) = V_{2+\sqrt{2}}$.

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 3 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 6 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\left(1+\sqrt{2}\right)x+3y+z=0 \\ -\sqrt{2}y=0 \\ x+6y+\left(1-\sqrt{2}\right)z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\left(\sqrt{2}-1\right)z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\left(\sqrt{2}-1\right)z \\ y=0 \\ z=z \end{cases}$$

Per cui l'autospazio risulta $V_{2+\sqrt{2}} = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

OSSERVAZIONE *– Avendo dovuto procedere con la diagonalizzazione, possiamo verificare lo stesso, pur non essendo necessario in questo caso, che la molteplicità algebrica degli autovalori è uguale alla molteplicità geometrica. Quest'ultima infatti è, per la definizione di pagina E2, la dimensione del relativo autospazio, che abbiamo verificato essere in tutti e tre i casi uguale a 1.*

L'endomorfismo è diagonalizzato, infatti la matrice D è uguale alla matrice $A^{-1}MA$, con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ e $A = \left(\begin{array}{c|c|c} V_2 & V_{2-\sqrt{2}} & V_{2+\sqrt{2}} \end{array} \right)$ tali che

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} & -\sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} & -\sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzioni a cura di Michele Bolzoni