

Algebra lineare – Geometria 1

11 luglio 2008

Esercizio 1. Si considerino la funzione:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto (2\beta - \alpha - \gamma, (k-1)\beta + (1-k)\gamma - \alpha, 3\beta + (k-2)\gamma) \end{cases}$$

dove k è un parametro reale, e il sottospazio $U = \langle (1, -2, 3) \rangle$ di \mathbb{R}^3 .

Dopo aver verificato che f è un omomorfismo per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ si determinino al variare di k :

1. la matrice A di f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 ;
2. le dimensioni di $\text{Im}(f)$ e $\text{ker}(f)$;
3. i valori di k per cui U è un sottospazio di $\text{Im}(f)$.

Posto ora $k = 2$:

4. si determinino una base per $\text{ker}(f)$ e per $\text{Im}(f)$;
5. si stabilisca se f è diagonalizzabile e in caso di risposta affermativa si determinino una matrice diagonale D e una matrice M tali che $D = M^{-1}AM$.

Svolgimento. f è un omomorfismo per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ perché ogni componente dell'immagine è definita da un'equazione lineare omogenea in α, β e γ .

1. La matrice A della rappresentazione scalare di f è la matrice che ha nelle colonne le componenti dei trasformati dei vettori della base canonica rispetto alla base canonica stessa, pertanto dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} f((1, 0, 0)) &= (-1, -1, 0) \\ f((0, 1, 0)) &= (2, k-1, 3) \\ f((0, 0, 1)) &= (-1, 1-k, k-2) \end{aligned}$$

e la matrice che si ottiene è:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & k-1 & 1-k \\ 0 & 3 & k-2 \end{bmatrix}.$$

2. Calcoliamo il determinante di A :

$$\det A = -(k-1)(k-2) + 3 + 3(1-k) + 2(k-2) = k(2-k)$$

Per i valori per cui $\det(A) \neq 0$, quindi per $k \neq 0, 2$, l'applicazione f è un automorfismo, pertanto $\dim \ker(f) = 0$ e $\dim \text{Im}(f) = 3$.

Se $k = 0$ la matrice corrispondente è

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2 visto che la prima e la seconda colonna (per esempio) non sono proporzionali, pertanto $\dim \text{Im}(f) = 2$ e, per il teorema di nullità più rango, $\dim \ker(f) = 3 - 2 = 1$.

Se $k = 2$ la matrice corrispondente è

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

che anche questa volta ha rango 2 visto che la prima e la seconda colonna (per esempio) non sono proporzionali, pertanto $\dim \text{Im}(f) = 2$ e, sempre per il teorema di nullità più rango, $\dim \ker(f) = 3 - 2 = 1$.

3. Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui f è un automorfismo l'immagine di f coincide con tutto \mathbb{R}^3 , pertanto sicuramente U è un sottospazio vettoriale di $\text{Im}(f)$.

Per $k = 0$ una base è costituita dalla prima e seconda colonna di A_0 , pertanto

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 0), (2, -1, 3) \rangle .$$

Inoltre

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

mostra che il generatore di U appartiene a $\text{Im}(f)$, e pertanto $U \leq \text{Im}(f)$.

Per $k = 2$ una base di $\text{Im}(f)$ è costituita dalla prima e dalla seconda colonna di A_2 , e dunque

$$\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 0), (2, 1, 3) \rangle .$$

In questo caso, però,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

pertanto $U \not\leq \text{Im}(f)$.

4. Una base per $\text{Im}(f)$ è già stata determinata al punto precedente. Per determinare i vettori di $\ker(f)$ dobbiamo risolvere il sistema lineare $Ax = \mathbf{0}$. Un sistema principale equivalente associato è

$$\begin{cases} -x + 2y = z \\ -x + y = z \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è

$$\ker(f) = \{(-z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 0, 1) \rangle.$$

5. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_2 :

$$p_{A_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 & -1 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = [\dots] = -\lambda(\lambda^2 + 4).$$

Tale polinomio non è interamente decomponibile su \mathbb{R} , pertanto per il terzo criterio di diagonalizzabilità la matrice A non è diagonalizzabile. \square

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & k+3 \\ 0 & 1 & k+6 & 1 \\ k+5 & 2 & k+3 & k \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{3,4}(\mathbb{Z}_7),$$

dove k è un parametro libero di variare in \mathbb{Z}_7 .

1. Si discuta la risolubilità del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in \mathbb{Z}_7 , specificando il numero di soluzioni;
2. posto $k = 0$ si determini l'insieme S delle soluzioni.

Svolgimento. 1. Il sistema è omogeneo, pertanto è sempre risolubile. Per determinare il numero di soluzioni calcoliamo il rango della matrice A . Il minore

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è non singolare, pertanto $r(A) \geq 2$ per ogni $k \in \mathbb{Z}_7$. Consideriamo l'orlato di M_1 ottenuto aggiungendo la terza colonna e calcoliamone il determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & k+6 \\ k+5 & 2 & k+3 \end{vmatrix} = [\dots] = k(2k+1) \pmod{7}$$

Pertanto se $k \neq -1/2, 0$, che in \mathbb{Z}_7 è equivalente a $k \neq 3, 0$, A ha rango massimo, e dunque il sistema ammette soluzioni dipendenti da $4 - 3 = 1$ parametri liberi in \mathbb{Z}_7 , ovvero 7 soluzioni.

Se $k = 3$ dobbiamo controllare il minore ottenuto orlando M_1 con la quarta colonna, ovvero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \pmod{7}$$

pertanto anche in questo caso $r(A) = 3$ e il sistema ammette soluzioni dipendenti da 1 parametro in \mathbb{Z}_7 .

Se infine $k = 0$ abbiamo, orlando con la quarta colonna,

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 5 & 2 & 0 & \end{array} \right| = -7 = 0 \pmod{7}$$

e dunque $r(A) = 2$ e il sistema ammette soluzioni dipendenti da 2 parametri in \mathbb{Z}_7 .

2. Per $k = 0$ abbiamo già determinato che l'insieme delle soluzioni dipende da due parametri liberi di variare in \mathbb{Z}_7 . Per determinare tale insieme consideriamo un sistema principale equivalente:

$$\begin{cases} x + 2y = -6z - 3t \\ y = -6z - t. \end{cases}$$

Tale sistema, risolto tenendo conto della congruenza modulo 7, produce

$$S = \{(6z + 6t, z + 6t, z, t) \in \mathbb{Z}_7^4 \mid z, t \in \mathbb{Z}_7\}. \quad \square$$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 si considerino i sottoinsiemi:

$$U = \{(\alpha, k\beta, 0, -\beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \langle (0, 1, 0, 0), (0, 2, 0, -1), (0, 0, k, 2k) \rangle,$$

dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$:

1. Stabilire se U e W sono sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 ;
2. determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ una base e la dimensione di $U + W$ e $U \cap W$ e stabilire per quali valori di k la somma è diretta.
3. Posto $k = 1$ determinare un complemento diretto di U in \mathbb{R}^4 .

Svolgimento. 1. U può essere riscritto nella forma

$$U = \langle (1, 0, 0, 0), (0, k, 0, -1) \rangle,$$

pertanto sia U che W sono sottospazi, essendo la chiusura di un insieme di vettori.

2. Cominciamo a determinare le dimensioni di U e W . È immediato verificare che i due generatori di U evidenziati al punto precedente sono linearmente indipendenti per qualsiasi valore di k , pertanto $\dim(U) = 2$ e $((1, 0, 0, 0), (0, k, 0, -1))$ è una sua base.

I generatori di W invece sono indipendenti solo se $k \neq 0$, pertanto in questo caso costituiscono una base di W che dunque ha dimensione 3. Se invece $k = 0$ la dimensione di W è 2 e una base è $((0, 1, 0, 0), (0, 2, 0, -1))$.

Sicuramente sappiamo che un insieme di generatori per $U + W$ è costituito da

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, k, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 2, 0, -1), (0, 0, k, 2k)\},$$

resta da stabilire, al variare di k , quanti e quali sono linearmente indipendenti.

Se $k \neq 0$ si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 2k \end{vmatrix} = -2k \neq 0$$

pertanto la dimensione di $U + W$ è 4, e dunque $U + W = \mathbb{R}^4$. Una sua base è la base canonica di \mathbb{R}^4 . Dalla formula di Grassmann si deduce che $\dim(U \cap W) = 3 + 2 - 4 = 1$, inoltre

$$(0, k, 0, -1) = (0, 2, 0, -1) + (k - 2)(0, 1, 0, 0) \in W,$$

pertanto $U \cap W = \langle (0, k, 0, -1) \rangle$.

Se $k = 0$ il quinto vettore del precedente insieme è il vettore nullo, inoltre il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è 3, come è immediato verificare, quindi $\dim(U + W) = 3$. Dalla formula di Grassmann si ricava che $\dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$, inoltre come prima $U \cap W = \langle (0, 0, 0, -1) \rangle$.

3. Posto $k = 1$ si ha $U = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1) \rangle$. Essendo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

un complemento diretto per U è il sottospazio $\langle (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle$. □

Geometria 2

11 luglio 2008

Esercizio 1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ si consideri la curva reale \mathcal{C} di equazione

$$\mathcal{C} : x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 = 0.$$

1. Riconoscere la conica \mathcal{C} e studiarla;
2. determinare la circonferenza tangente a \mathcal{C} nei suoi punti $P_1 = [(1, 3, 1)]$ e $P_2 = [(1, 1, 1)]$;
3. determinare un'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti P_1 e P_2 e le coniche degeneri di tale fascio.

Svolgimento. 1. La matrice associata alla conica \mathcal{C} è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\det(A) = -1$, pertanto la conica è generale, inoltre $\det(A^*) = 0$, quindi \mathcal{C} è una parabola. Il suo punto improprio si ottiene risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $C_\infty = [(1, 0, 0)]$. L'asse proprio della parabola è la polare della direzione ortogonale al punto C_∞ appena determinato:

$$[x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

da cui si ricava $a : x_2 - 2x_3 = 0$. Il vertice V di \mathcal{C} è l'intersezione di \mathcal{C} con l'asse, pertanto il punto $V = [(3, 4, 2)]$.

2. Determiniamo il fascio \mathcal{F} di coniche bitangenti a \mathcal{C} in P_1 e P_2 ; per farlo sfruttiamo una delle coniche degeneri di tale fascio: la retta congiungente P_1 e P_2 contata due volte. Pertanto:

$$\mathcal{F} : x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 + k(x_1 - x_3)^2 = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Per determinare la circonferenza di tale fascio imponiamo la condizione che i coefficienti di x_1^2 e x_2^2 siano uguali, ottenendo $k = 1$, dunque un'equazione cartesiana della circonferenza Γ cercata è:

$$\Gamma : x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0.$$

3. Il fascio \mathcal{F}' di coniche da determinare è individuato dal passaggio per P_1 e P_2 e dal passaggio per i punti ciclici $I_\infty = [(1, i, 0)]$ e $J_\infty = [(1, -i, 0)]$ del piano proiettivo complesso (quest'ultima condizione ci garantisce che otterremo un fascio di circonferenze). Già conosciamo una conica del fascio, la circonferenza Γ , pertanto resta da determinare un'ulteriore conica (degenere), per esempio l'unione delle due rette $\overline{P_1, P_2}$ e $\overline{I_\infty, J_\infty}$. L'equazione della retta $\overline{P_1, P_2}$ è già stata determinata al punto precedente, mentre la retta $\overline{I_\infty, J_\infty}$ è la retta impropria, dunque la conica \mathcal{C}_1 ha equazione:

$$\mathcal{C}_1 : x_3(x_1 - x_3) = 0,$$

pertanto il fascio cercato ha equazione

$$\mathcal{F}' : x_1^2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 + kx_3(x_1 - x_3) = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Le coniche degeneri del fascio sono la conica \mathcal{C}_1 già determinata, e le coniche

$$\mathcal{C}_2 = \overline{P_1, I_\infty} \cup \overline{P_2, J_\infty}$$

$$\mathcal{C}_3 = \overline{P_1, J_\infty} \cup \overline{P_2, I_\infty}$$

che hanno equazioni:

$$\mathcal{C}_2 : (ix - y + 3 - i)(ix + y - 1 - i) = 0$$

$$\mathcal{C}_3 : (ix + y - 3 - i)(ix - y + 1 - i) = 0. \quad \square$$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali si considerino le rette

$$r : \begin{cases} y = 2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z - 3 = 0. \end{cases}$$

1. Si determini la mutua posizione delle rette r ed s ;
2. si determini un'equazione cartesiana del luogo \mathcal{L} descritto dalla rotazione della retta r attorno alla retta s ;
3. si determinino le equazioni cartesiane della retta passante per $P = (1, 2, 0)$ ortogonale e incidente ad s .

Svolgimento. 1. Scrivendo delle equazioni parametriche per r ed s

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 2t \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 0 \\ z = -1 + 2h \end{cases} \quad t, h \in \mathbb{R}$$

si vede immediatamente che la classe di proporzionalità dei parametri direttori di entrambe le rette è $[(1, 0, 2)]$, pertanto le due rette sono parallele. Inoltre s è contenuta nel piano $y = 0$, mentre r nel piano $y = 2$, pertanto le due rette sono anche distinte.

2. Per determinare delle equazioni parametriche per il luogo cercato intersechiamo la sfera avente come centro un punto qualsiasi della retta s con il piano passante per il generico punto della retta r e ortogonale alle due rette. Il generico punto della retta r , al variare di $t \in \mathbb{R}$, è $R_t = (1 + t, 2, 2t)$, pertanto il piano cercato è

$$\pi_t : 1(x - 1 - t) + 0(y - 2) + 2(z - 2t) = 0,$$

ovvero

$$\pi_t : x + 2z - 5t - 1 = 0.$$

Come centro per la sfera Σ scegliamo un punto comodo su s , per esempio (per $h = 0$) $S = (1, 0, -1)$, mentre il raggio sarà

$$d(S, R_t) = \sqrt{t^2 + 4 + (2t + 1)^2} = \sqrt{5t^2 + 4t + 5}.$$

Il luogo \mathcal{L} cercato ha pertanto equazioni parametriche

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5t^2 + 4t + 5 \\ x + 2z - 5t - 1 = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

da cui, ricavando il parametro t nella seconda equazione e sostituendo nella prima, si può ottenere l'equazione cartesiana:

$$\mathcal{L} : 4x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xz - 12x + 6z - 12 = 0.$$

3. Il punto P non appartiene a s pertanto scriviamo la retta richiesta come intersezione del piano π individuato da s e da P con il piano σ passante per P e ortogonale a s . Il fascio di piani di sostegno s ha equazione

$$2x - z - 3 + ky = 0, \quad k \in \mathbb{R}$$

e la condizione di passaggio per $P = (1, 2, 0)$ restituisce $k = 1/2$, pertanto

$$\pi : 4x + y - 2z - 6 = 0.$$

Per il piano σ invece abbiamo

$$1(x - 1) + 0(y - 2) + 2z = 0$$

ovvero

$$\sigma : x + 2z - 1 = 0,$$

e dunque la retta cercata ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 4x + y - 2z - 6 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

□

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si consideri la forma bilineare simmetrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + k^2x_3y_3 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - kx_3y_1 - kx_1y_3 - 2kx_3y_2 - 2kx_2y_3$$

dove k è un parametro reale. Al variare di k determinare:

1. la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 ;
2. il radicale della forma bilineare f ;
3. l'insieme \mathcal{I} dei vettori di \mathbb{R}^3 isotropi rispetto a f e stabilire se esistono valori di k per cui \mathcal{I} è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 .
4. Posto $k = 1$ determinare una base di \mathbb{R}^3 ortogonale rispetto a f .

Svolgimento.

1. Se indichiamo con $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonica di \mathbb{R}^3 la matrice che rappresenta f rispetto a tale base ha come elemento di posto (i, j) $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, pertanto è la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -k \\ 2 & 4 & -2k \\ -k & -2k & k^2 \end{bmatrix}.$$

È immediato osservare che le tre righe della matrice sono proporzionali per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$, pertanto $r(A) = 1$.

2. Il radicale di f è l'insieme

$$(\mathbb{R}^3)^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Per determinarlo è sufficiente imporre la condizione di ortogonalità sui vettori di una base qualsiasi di \mathbb{R}^3 . Se utilizziamo la base canonica ci troviamo a dover risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dove la matrice A è la matrice determinata al punto precedente, pertanto il radicale di f ha dimensione $3 - r(A) = 2$ per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$. Un sistema principale equivalente associato al sistema dato è

$$x + 2y - kz = 0,$$

pertanto

$$(\mathbb{R}^3)^\perp = \{(kz - 2y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 0), (k, 0, 1) \rangle.$$

I due vettori $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (k, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti per qualsiasi scelta di $k \in \mathbb{R}$, pertanto costituiscono una base di $(\mathbb{R}^3)^\perp$.

3. L'insieme dei vettori isotropi rispetto a f è l'insieme dei vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ che verificano l'equazione $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, da cui si ricava

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2kx_1x_3 - 4kx_2x_3 = 0\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 + 2x_2 - kx_3)^2 = 0\}.\end{aligned}$$

Tale insieme è sempre un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 , in quanto è definito da un'equazione lineare omogenea.

Si noti che se volessimo determinare una base per \mathcal{I} avremmo $x_1 = kx_3 - 2x_2$, e dunque

$$\mathcal{I} = \langle (-2, 1, 0), (k, 0, 1) \rangle = (\mathbb{R}^3)^\perp.$$

4. Per $k = 1$ la matrice di f rispetto alla base canonica diventa

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La base canonica non è ortogonale poiché la matrice A_1 non è diagonale. Inoltre

$$f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

pertanto $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ non appartiene a \mathcal{I} , e dunque la terna

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0), \mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1))$$

è una base ortogonale di \mathbb{R}^3 . □