Geometria – Geometria 2

13 settembre 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si considerino la retta t: $x - y = 0$ e i punti O(0, 0), A(0, –1), B(2, 0).
i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti alla retta t e passanti per i punto A, O, B.

Fra i tre punti dati deve essere individuato il punto di tangenza appartenente alla retta t. Tale punto è O = (0,0); restano da individuare le coniche degeneri. Poiché Φ è un fascio di coniche tangenti, le uniche coniche degeneri sono $D_1 = t \cup r_{AB}$ e $D_2 : r\,(\mathrm{O}, \mathrm{A}) \cup r\,(\mathrm{O}, \mathrm{B})$. Ricaviamo la retta mancante:

$$r_{AB} : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r_{AB} : x - 2y - 2 = 0 .$$

Risulta $D_1 : (x - y)(x - 2y - 2) = 0$; $D_1 : x^2 + 2y^2 - 3xy - 2x + 2y = 0$

E, si calcola immediatamente, $D_2 : xy = 0$

Il fascio risulta $\Phi := \lambda D_1 + \mu D_2$ e, posto $k := \dfrac{\mu}{\lambda}$, dividendo per λ, otteniamo il fascio in forma ridotta, quello, cioè, nel quale non esiste valore di k in grado di fornire l'equazione della conica D_2.
Risulta

$$\Phi : x^2 + 2y^2 + (k - 3)xy - 2x + 2y = 0 .$$

Scriviamo subito la matrice M relativa alla generica conica di Φ, dopo averne moltiplicato ambo i membri dell'al fine di evitare le frazioni.

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & k-3 & -2 \\ k-3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Nel fascio Φ si individui l'iperbole Γ avente un asintoto perpendicolare alla retta t; si scrivano le equazioni degli asinototi di Γ.

I parametri direttori di t sono la classe di proporzionalità $[(l,m)]=[(1,1)]$. Sia a una retta perpendicolare a t, e siano (l',m') i parametri direttori di a. Come spiegato a pagina 243, $a \perp r \Leftrightarrow ll' + mm' = 0$. Risulta $m' = -l'$, per cui i parametri direttori di a sono rappresentati dalla coppia $(-1,1)$.
Ricordando ora che i parametri direttori degli asintoti di un'iperbole (come spiegato a pagina 303) risolvono la $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$ (*), risulta

$$2+2(k-3)(-1)+4(-1)^2 = 0 \Rightarrow k = 6.$$

Pertanto $\Gamma: x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x + 2y = 0$.
Per scrivere le equazioni degli asintoti, calcoliamo innanzitutto le coordinate del centro dell'iperbole con il metodo delle derivate parziali.
C = $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$. Da qui si ricava: C(–14, 10).
Riprendiamo ora la (*). Fissato k = 6, calcoliamo l e m (uno in funzione dell'altro).

$$l^2 + 3lm + 2m^2 = 0 \Rightarrow (l+2m)(l+m) = 0 \Rightarrow m = -\frac{l}{2} \vee m = -l.$$

La seconda soluzione ci restituisce i parametri direttori di a (primo asintoto dell'iperbole), l'altra ci fornisce i parametri direttori del secondo asintoto, che chiamiamo a'. Essi sono $[(-2,1)]$.
Sia ora A il fascio improprio di rette aventi tutte i parametri direttori di a. Esso ha equazione $A: x + y + \alpha = 0$. Ad esso imponiamo il passaggio per C. Risulta
$-14+10+\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow a: x + y + 4 = 0$ che è l'equazione del primo asintoto.
Sia A' il fascio improprio di rette aventi tutte i parametri direttori di a'. Esso ha equazione $A': x + 2y + \beta = 0$. Imponiamo il passaggio per C. Risulta
$-14+20+\beta = 0 \Rightarrow \beta = -6 \Rightarrow a': x + 2y = 6$ che è l'equazione del secondo asintoto.

iii) Si determini l'equazione della conica Σ del fascio che ha centro nel punto H(1, –½); si riconosca Σ. Considerato poi il punto D(–5, –2), si trovino le coordinate dei punti di contatto delle tangenti condotte a Σ in tale punto.

Innanzitutto calcoliamo le coordinate del centro della generica conica del fascio in funzione del parametro k con il metodo delle derivate parziali. Risulta il sistema
C(k) = $\begin{cases} 2x+(k-3)y=2 \\ (k-3)x+4y=-2 \end{cases}$, che risolviamo, per esempio, con la regola di Cramer.

$$x_C=\frac{\begin{vmatrix}2 & k-3\\ -2 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & k-3\\ k-3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{8+2(k-3)}{8-(k-3)^2}=-2\frac{k+1}{k^2-6k+1};$$

$$y_C=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2\\ k-3 & -2\end{vmatrix}}{-(k^2-6k+1)}=-\frac{-4-2(k-3)}{k^2-6k+1}=2\frac{k-1}{k^2-6k+1}.$$

Imponiamo ora che H = C. Perciò

$$\begin{cases} x_H=x_C \Rightarrow 1=-2\dfrac{k+1}{k^2-6k+1}\Rightarrow \ldots\Rightarrow k^2-4k+3=0\Rightarrow k=3\vee k=1\\ y_H=y_C\Rightarrow -\dfrac{1}{2}=2\dfrac{k-1}{k^2-6k+1}\Rightarrow\ldots\Rightarrow k^2-2k-3=0\Rightarrow k=3\vee k=-1\end{cases}\Rightarrow k=3.$$

L'equazione della conica cercata è perciò $\Sigma: x^2+2y^2-2x+2y=0$, la cui matrice è $M_\Sigma=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Det $M_\Sigma = -3 \neq 0$ perciò Σ non è degenere.

Inoltre $|m_{33}| = 2 > 0$ per cui Σ è un'ellisse. Inoltre si può concludere che Σ non è una circonferenza poiché $a_{11}\neq a_{22}$.

Sia ora $\pi_\Sigma(D)$ la polare di D rispetto alla conica Σ. Essa congiunge i punti in cui le rette uscenti da D sono tangenti alla conica Σ. Ricordando che $\pi_\Sigma(D)$: $\underline{D}\,M_\Sigma^T\,\underline{X}=0$,

$$\pi_\Sigma(D):\ \begin{pmatrix}-5 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-6 & -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow\pi_\Sigma(D):\ 2x+y=1$$

Siano S, T i punti cercati. Risulta $\{S, T\} = \pi_\Sigma(D) \cap \Sigma$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases}y=1-2x\\ x^2+2y^2-2x+2y=0\end{cases}\Rightarrow\ldots\Rightarrow 9x^2-14x+4=0\Rightarrow x_{S,T}=\frac{7\mp\sqrt{13}}{9}.$$

Per cui i punti cercati sono $S=\left(\dfrac{7-\sqrt{13}}{9},\dfrac{2\sqrt{13}-5}{9}\right)$ e $T=\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{9},-\dfrac{2\sqrt{13}+5}{9}\right)$.

iv) Nel piano proiettivo reale ampliamento del piano affine euclideo assegnato, si individuino le coniche non degeneri di Φ che sono tangenti alla retta impropria; per ognuna di tali coniche si determini il punto di tangenza con la retta impropria.

Bisogna ricordare che le coniche tangenti alla retta impropria sono le parabole. Lavoriamo perciò sull'invariante quadratico della matrice A, imponendo $|a_{33}| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2 & k-3 \\ k-3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8-(k-3)^2 = 0 \Rightarrow \left(2\sqrt{2}-k+3\right)\left(2\sqrt{2}+k-3\right) = 0 \Rightarrow k = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Per tali valori otteniamo le due parabole P_1 e P_2 di equazione

$$P_1 : x^2+2y^2+2\sqrt{2}xy-2x+2y=0 \quad \text{e} \quad P_2 : x^2+2y^2-2\sqrt{2}xy-2x+2y=0$$

Che le due coniche siano generali è dovuto al fatto che l'unica conica degenere del fascio in forma ridotta si ottiene per $k = 0$, che non è il nostro caso.
Osserviamo poi che le equazioni delle due parabole sono due sviluppi di quadrati. Riconoscerlo ci aiuta a calcolare il punto di tangenza. Infatti:
$\left(x_1-\sqrt{2}x_2\right)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}x_2 \Rightarrow T_1 = [(\sqrt{2},1,0)]$, e allo stesso modo,
$\left(x_1+\sqrt{2}x_2\right)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}x_2 \Rightarrow T_2 = [(-\sqrt{2},1,0)]$.

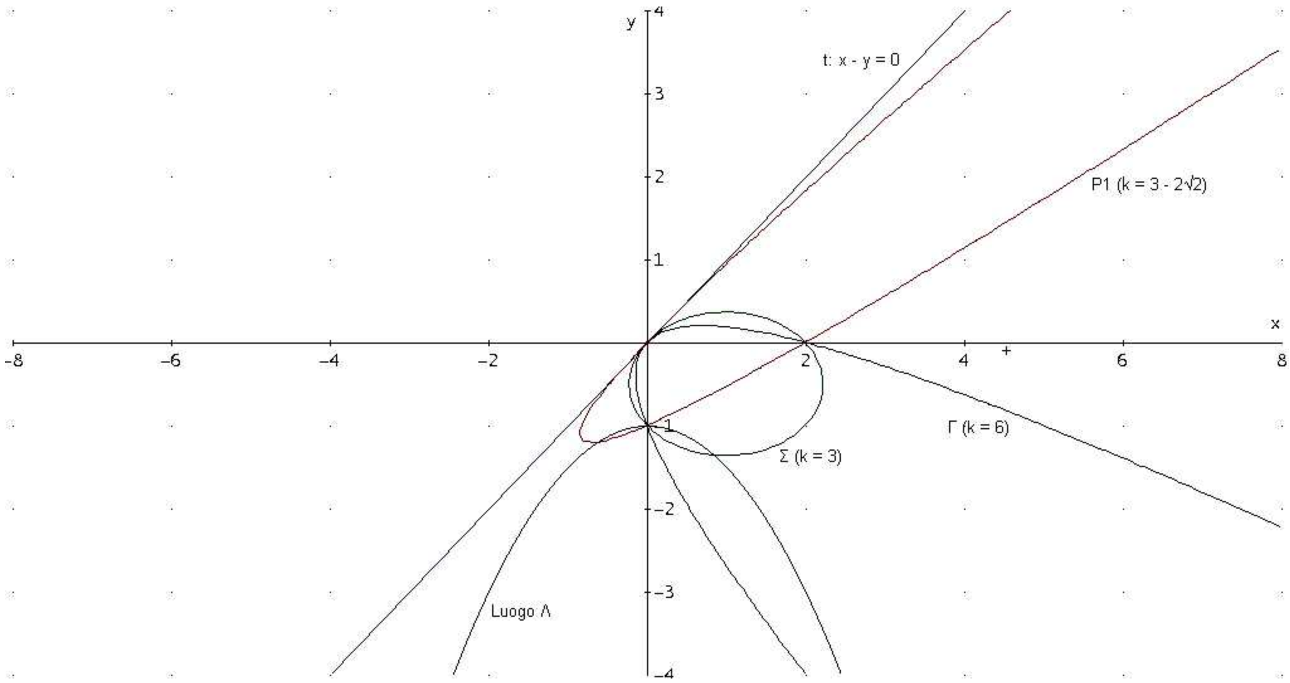
v) Si indichi con R l'ulteriore punto di intersezione della retta parallela all'asse *x* condotta per A con la generica conica K del fascio Φ. Siano poi *r* la retta tangente in A alla conica K, *p* la retta parallela all'asse *y* passante per R, P il punto di intersezione tra *r* e *p*. Si scriva l'equazione cartesiana del luogo Λ descritto dal punto P al variare della conica K nel fascio Φ. Si riconosca Λ.

Banalmente, la retta parallela all'asse *x* condotta per A ha equazione $y = -1$. Mettiamo a sistema $\begin{cases} \Phi : x^2+2y^2+(k-3)xy-2x-2y=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-(k-1)x=0$.
Le soluzioni sono $x = 0$ (che restituisce il punto A) e $x = k-1$. Perciò $R = (k-1,-1)$.
Banalmente, la retta parallela all'asse *y* passante per R è $p : x = k-1$.
La retta *r* tangente alla generica conica K in A è la polare di A rispetto a K.
Ricordando che $r = \pi_K(A)$: $\underline{A}^T M \underline{X} = 0$, ove $\underline{A}$ è il vettore delle coordinate del punto A, M è la matrice della generica conica del fascio, $\underline{X}$ il vettore delle coordinate di un generico punto, risulta

$$\pi_K(A):\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k-3 & -2 \\ k-3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow r: (k-1)x+2y+2=0.$$

$\{P\} := \quad r \cap p = \begin{cases} k = x + 1 \\ (k-1)x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$, sistema che ci permette di eliminare il parametro e di ottenere l'equazione del luogo $\Lambda : x^2 + 2y + 2 = 0$. Si riconosce facilmente, anche senza costruirne la matrice, specie se riscritta nella forma $\Lambda : y = -\frac{x^2}{2} - 1$ che si tratta di una parabola con asse verticale.

Grafico riassuntivo



2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino il piano α: $x + y - z + 2 = 0$ e i punti A(–1, 0, 0), B(0, 2, 3).
i) Si stabilisca la posizione reciproca tra il piano α e la retta r individuata dai punti A e B.

Per scrivere le equazioni di r, retta per AB, utilizziamo il metodo di pagina 226:

$$r:\begin{cases}(x-x_A)(y-y_A)-(y-y_A)(x_B-x_A)=0\\(x-x_A)(z_B-z_A)-(z-z_A)(x_B-x_A)=0\end{cases}\Rightarrow\ldots\Rightarrow r:\begin{cases}2x-y+2=0\\3x-z+3=0\end{cases}.$$

Consideriamo il sistema $r\cap\alpha:\begin{cases}x+y-z=-2\\2x-y=-2\\3x-z=-3\end{cases}$, la cui matrice è $M=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-2\\2&-1&0&-2\\3&0&-1&-3\end{array}\right)$.

Det M = 0, per cui, come spiegato a pagina 232, la retta r è parallela al piano α. Inoltre, dalla teoria sui sistemi lineari risulta che il rango della matrice dei coefficienti, pari a 2, è diverso da quello della matrice completa, che è 3. Per cui non vi sono intersezioni tra la retta e il piano, quindi la retta r è esterna e parallela al piano α: r || α e $r\cap\alpha=\varnothing$.

ii) Detti Φ_1 il fascio proprio di piani di sostegno r e Φ_2 il fascio improprio di piani di sostegno α, si determini l'equazione del piano, se esiste, comune a Φ_1 e Φ_2.

Per costruire Φ_1 è sufficiente combinare linearmente le equazioni della retta di sostegno del fascio, r. Risulta

$$2x-y+2+k(3x-z+3)=0\Rightarrow\Phi_1:(3k+2)x-y-kz+3k+2=0.$$

Per costruire Φ_2 è sufficiente aggiungere un fattore additivo all'equazione della retta r. Risulta

$$x+y-z+2+h=0 \text{ e, posto } \lambda:=h+2,$$
$$\Phi_2:x+y-z+\lambda=0$$

Discutiamo ora l'intersezione dei due fasci secondo la teoria illustrata a pagina 224. Vogliamo verificare se i due fasci hanno un piano in comune, per cui imponiamo

Rg $\begin{pmatrix}3k+2&-1&-k&3k+2\\1&1&-1&\lambda\end{pmatrix}=1$. Bisogna che tutti i 6 minori di ordine due siano singolari. Risulta

$\begin{vmatrix}3k+2&-1\\1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=-1$ e $\begin{vmatrix}3k+2&-k\\1&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=-1$ e

$\begin{vmatrix}3k+2&3k+2\\1&\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=-\frac{2}{3}\vee\lambda=1$ e $\begin{vmatrix}-1&-k\\1&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=-1$ e

$\begin{vmatrix}-1&3k+2\\1&\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=-\frac{1}{3}(\lambda+2)$ e $\begin{vmatrix}-k&3k+2\\-1&\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow k=\frac{2}{\lambda-3}$.

Tutte le 6 relazioni sono soddisfatte per $k=-1 \wedge \lambda=1$. Sostituendo tali valori nell'equazione di uno dei due fasci di piani, si ottiene l'equazione di π, piano comune a Φ_1 e Φ_2. Risulta $\pi: x+y-z+1=0$.

<u>iii) Si individui il piano β del fascio Φ_1 perpendicolare al piano α.</u>

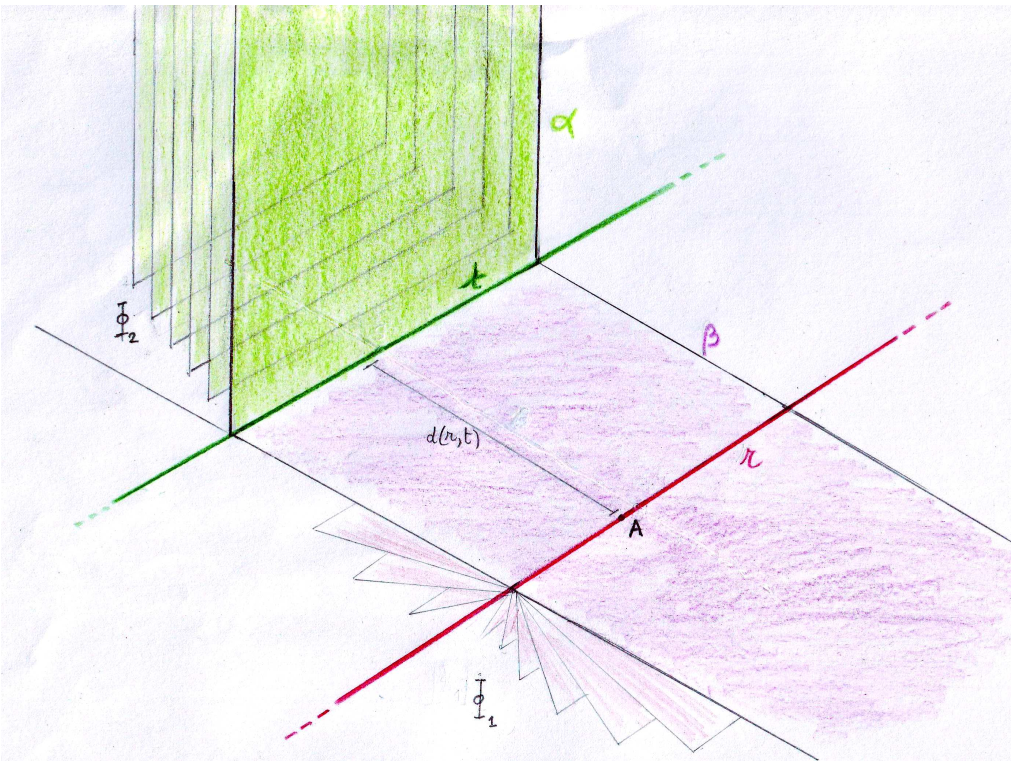
Come illustrato a pagina 250, la condizione di perpendicolarità fra piani afferma che, dati i piani $\begin{array}{l}\rho: ax+by+cz+d=0 \\ \tilde{\rho}: a'x+b'x+c'z+d'=0\end{array}$, $\rho \perp \tilde{\rho} \Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$.

Nel nostro caso consideriamo come piano ρ il generico piano del fascio Φ_1, e come piano $\tilde{\rho}$ il piano π. Otteniamo $(3k+2)\cdot 1+(-1)\cdot 1+(-k)(-1)=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{4}$.

Risulta (sostituendo tale valore di *k* in Φ_1), $\beta: 5x-4y+z+5=0$.

<u>iv) Indicata con *t* la retta di intersezione tra i piani α e β, si verifichi che le rette *t* e *r* sono tra loro parallele e se ne determini la distanza.</u>

Possiamo verificare il parallelismo fra le rette senza neppure scrivere l'equazione di *t*. Non procederemo infatti meccanicamente con il calcolo dei parametri direttori, ma aiutati da un disegno riassuntivo, osserviamo che vale il seguente:



<u>Teorema</u> Nello spazio affine $\mathbf{R}^3$ siano *r* una retta parallela ad un piano α. Sia β un piano non parallelo ad α contenente la retta *r*. Allora, definita la retta $t:=\alpha \cap \beta$, si ha che le rette *r* e *t* sono parallele.

Dimostrazione. Detti P, Q, T punti dello spazio e W_2 un sottospazio di dimensione 2, sia α = [P, W_2], dove $W_2 = < \underline{u}, \underline{w} >$ con $\underline{u}$, $\underline{w}$ vettori di $\mathbf{R}^3$.
Essendo r // α, risulta r = [Q, $< \underline{w} >$] (oppure r = [Q, $< \underline{u} >$]).
Essendo $r \subseteq \beta$, risulta β = [Q, W'_2], con $W'_2 = < \underline{v}, \underline{w} >$, ove $\underline{v}$ è vettore di $\mathbf{R}^3$ tale che $\underline{u} \notin \langle \underline{v} \rangle$, dal momento che α e β non sono paralleli fra di loro.
Risulta $t := \alpha \cap \beta$ = [T, $W_2 \cap W'_2$] = [T, $< \underline{w} >$], che è una retta parallela ad r. ■

Per calcolare la distanza fra le rette non seguiamo il metodo generale illustrato alle pagine 252-3, ma osserviamo che ci troviamo in un caso molto particolare in cui la distanza cercata è equivalente alla distanza fra un qualsiasi punto della retta r e il piano α. Scegliamo pertanto il punto dato $A(-1,0,0) \in r$ e ricordiamo la terna dei coefficienti dell'equazione del piano α: $(a,b,c) = (1,1,-1)$.
Applichiamo quindi la formula della distanza punto – piano illustrata a pagina 251:

$$d(A,\alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

<u>v) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo Ω dei punti P del piano α tali che AB = = 2PB. Dopo avere constatato che tale luogo è una circonferenza, si determinino il centro e il raggio di Ω.</u>

Calcoliamo la distanza AB come distanza pitagorica. Risulta AB = $\sqrt{14}$.
Tenendo un P(x, y, z) generico sia invece 2BP = $2\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$.
Uguagliando le due quantità, risulta $\frac{7}{2} = x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$, che è l'equazione di una sfera vista come luogo di punti dello equidistanti dal centro. Ma questi punti devono appartenere al piano α, per cui la sfera va intersecata con un piano così da ottenere una circonferenza. Essa è proprio il luogo cercato e ha equazione

$$\Omega: \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8y - 12z + 19 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Soluzioni a cura di Michele Bolzoni