Algebra lineare – Geometria 1

15 luglio 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}_3[x]$ si considerino l'insieme

$$A_k = \{1 + x, k + (1 - k)x^2, 1 + (k - 1)x^2 + x^3\},$$

il vettore $\mathbf{v}_k = k + kx - x^3$ e la funzione

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ a + bx + cx^2 + dx^3 & \longmapsto & (a + b, b + c, c + d), \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $\mathbf{v}_k$ appartiene allo spazio vettoriale generato dall'insieme A_k;
2. determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, un complemento diretto per $< A_k >$.

Posto ora $k = 1$:

3. verificare che f è un omomorfismo e determinarne la matrice della rappresentazione scalare rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}_3[x]$ e di $\mathbb{R}^3$;
4. determinare nucleo e immagine di f;
5. determinare le preimmagini tramite f di $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$;
6. determinare la matrice della rappresentazione scalare di f rispetto alla base di $\mathbb{R}_3[x]$ ottenuta completando a base una base di $< A_1 >$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento. Cominciamo ad osservare che i vettori che costituiscono l'insieme A_k sono linearmente indipendenti qualsiasi sia il valore di $k \in \mathbb{R}$, infatti se consideriamo la matrice

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha nelle colonne le componenti di tali vettori rispetto alla base canonica $\mathscr{B}_c = (1, x, x^2, x^3)$ di $\mathbb{R}_3[x]$ si ha che

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 - k = 0 \iff k = 1,$$

pertanto il rango di M_k è 3 purché $k \neq 1$; per $k = 1$, del resto, si ha

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1, \tag{1}$$

quindi anche in questo caso $\mathrm{r}(M_1) = \dim(< A_1 >) = 3$.

1. Essendo 3 il rango della matrice M_k il vettore $\mathbf{v}_k$ appartiene ad $< A_k >$ se e soltanto se

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & k+1 & k \\ 1 & 0 & k & k \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= - \begin{vmatrix} 1 & k & k+1 \\ 0 & -k & -1 \\ 0 & 1-k & k-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1-k & k-1 \end{vmatrix} = k^2 - 1,$$

   ovvero se e soltanto se $k = \pm 1$.

2. Osserviamo che, essendo $\dim < A_k >= 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, un complemento diretto di $< A_k >$ in $\mathbb{R}^4$ ha sempre dimensione 1, pertanto basta individuare un vettore linearmente indipendente dai vettori di A_k.

   Per quanto stabilito al punto precedente se $k \neq \pm 1$ $\mathbf{v}_k$ non appartiene ad $< A_k >$, pertanto costituisce una base per un complemento diretto di $< A_k >$, che dunque è $< \mathbf{v}_k >$.

   Se $k = 1$ è immediato verificare osservando (1) che un vettore che genera un complemento ortogonale è, per esempio, il vettore di componenti $(0, 0, 1, 0)$, ovvero il polinomio x^2.

   Se $k = -1$ si ha, infine,

$$M_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   ed è immediato verificare che un vettore che genera il complemento ortogonale è per esempio quello di componenti $(1, 0, 0, 0)$, ovvero il polinomio 1.

3. Osserviamo che f è un omomorfismo, essendo le componenti del generico vettore dell'immagine definite da polinomi lineari omogenei. Per determinare la matrice della rappresentazione scalare di f rispetto alle basi canoniche occorre calcolare

$$\begin{aligned} f(1) &= (1, 0, 0) \qquad & f(x^2) &= (0, 1, 1) \\ f(x) &= (1, 1, 0) \qquad & f(x^3) &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

pertanto la matrice, che ha nelle colonne le componenti dei trasformati dei vettori della base scelta nel dominio rispetto alla base scelta nel codominio, è

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. L'immagine di f è generata dalle colonne di F, ed è immediato verificare che $r(F) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, pertanto $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Per il Teorema di nullità più rango $\dim \ker(f) = 4 - 3 = 1$. Per determinare i vettori di $\ker(f)$ occorre risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

che si risolve facilmente e produce $S = \{(\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, e dunque il nucleo di f è:

$$\ker(f) = \{\alpha - \alpha x + \alpha x^2 - \alpha x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = < 1 - x + x^2 - x^3 > .$$

Si noti che risolvendo il sistema lineare di ottengono le *componenti* dei vettori del nucleo, che sono un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, mentre il nucleo di f che è richiesto dall'esercizio è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$.

5. Per determinare l'insieme delle preimmagini di $\mathbf{w}$ occorre considerare il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ b + c = -1 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

che, come si calcola facilmente, ha come soluzione

$$S' = \{(1 - \alpha, \alpha, -1 - \alpha, 1 + \alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Si ha pertanto

$$f^{-1}(\mathbf{w}) = (1 - x^2 + x^3) + < 1 - x + x^2 - x^3 > = (1 - x^2 + x^3) + \ker f.$$

6. Al punto 2. avevamo stabilito che una base di $\mathbb{R}_3[x]$ ottenuta completando una base di $< A_1 >$ è

$$\mathscr{B} = \big(1 + x, 1, 1 + x^3, x^2\big),$$

quindi per determinare la matrice richiesta basta calcolare

$$\begin{aligned} f(1+x) &= (2,1,0) \qquad & f(1+x^3) &= (1,0,1) \\ f(1) &= (1,0,0) \qquad & f(x^2) &= (0,1,1), \end{aligned}$$

e dunque

$$F' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Esercizio 2. Si consideri, al variare del parametro reale k, la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 2 & 0 & k & 0 \\ k+1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

1. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli autovalori della matrice A_k e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica; stabilire inoltre per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile;

Posto ora $k = -1$:

2. determinare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A_{-1};

3. determinare una matrice $B \neq A_{-1}$ simile alla matrice A_{-1}.

Svolgimento. 1. Cominciamo a calcolare il polinomio caratteristico di A_k.

$$\begin{aligned} p_{A_k}(\lambda) = \det(A_k - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & k & 0 \\ k+1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1-\lambda & 0 \\ k & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & k \\ k+1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & k+1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(k+1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ k+1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda)(k+1-\lambda) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A_k sono pertanto $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = k+1$.

Se $k \neq 0, 1$ i tre autovalori sono distinti, pertanto $a(1) = 2$, $a(2) = 1 = g(2)$ e $a(k+1) = 1 = g(k+1)$; resta da stabilire la molteplicità geometrica dell'autovalore 1. Per farlo consideriamo la matrice

$$A_k - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ k+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango pari a 2 per ogni valore di k (come è facile verificare), pertanto $g(1) = 4 - 2 = 2$. Poiché tutti gli autovalori sono regolari, in questo caso la matrice A_k è diagonalizzabile.

Se $k = 0$ allora $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, pertanto $a(1) = 3$ e $a(2) = 1 = g(2)$, mentre abbiamo già stabilito che la matrice $A_0 - I$ ha rango 2, quindi $g(1) = 2$ e la matrice non è diagonalizzabile.

Se infine $k = 1$ allora $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, pertanto $a(1) = 2 = g(1)$ e $a(2) = 2$; calcoliamo allora la molteplicità geometrica di 2.

$$A_1 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ha rango pari a 3 essendo per esempio

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

quindi $g(2) = 4 - 3 = 1 < a(2)$ e la matrice A_1 non è diagonalizzabile.

2. Per determinare una base di autovettori (cosa possibile in virtù di uno dei Criteri di diagonalizzabilità perchè per $k = -1$ la matrice è, appunto, diagonalizzabile) dobbiamo calcolare una base degli autospazi relativi a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$.

   Nel primo caso abbiamo

$$A_{-1} - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   da cui si ricava immediatamente $V_1 =< (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) >$.

   Per $\lambda_2 = 2$ abbiamo

$$A_{-1} - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 3 come già stabilito, quindi un sistema principale equivalente al sistema omogeneo associato a questa matrice è

$$\begin{cases} z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -x + z - t = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $V_2 =< (1, 0, 0, -1) >$.

Per $\lambda_3 = 0$ dobbiamo infine risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A_{-1} - 0I = A_{-1}$, ovvero, considerando un sistema principale equivalente associato,

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x + z + t = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $V_0 =< (1, -2, 2, -1) >$.

Una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A_{-1} è dunque

$$\mathscr{B} = \big((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (1, -2, 2, -1)\big).$$

3. Essendo la matrice A_{-1} diagonalizzabile, una matrice sicuramente simile ad A_{-1} è la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di A_{-1}, ovvero

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Geometria 2

15 luglio 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare b_k definita rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & k & k(k-2) \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare i valori di k per cui b_k è un prodotto scalare;
2. per ciascuno dei valori determinati al punto precedente determinare la dimensione per il radicale di b_k e, se esiste, una sua base;
3. posto $k = -1$ e indicato con $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$, determinare il complemento ortogonale di $< \mathbf{v} >$ rispetto a b_{-1}.

Svolgimento. 1. Affinché b_k sia un prodotto scalare la matrice A_k che lo rappresenta deve essere simmetrica, pertanto $k(k-2) = 3$, da cui si ricava $k = 3$ o $k = -1$.

2. Per $k = -1$ la matrice è

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2, pertanto $\dim(\mathbb{R}^3)^\perp = 3 - 2 = 1$. Per determinare il radicale dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice A_{-1}, che, passando ad un sistema principale equivalente, è

$$\begin{cases} -y + 3z = -2x \\ 3y = -3x, \end{cases}$$

da cui si ricava $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{(\alpha, -\alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} =< (1, -1, -1) >$.

Per $k = 3$ abbiamo

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\det A_3 = -36$, pertanto $\dim(\mathbb{R}^3)^\perp = 3 - 3 = 0$ e $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

3. Osserviamo innanzitutto che il vettore $\mathbf{v}$ è anisotropo rispetto a b_{-1}, pertanto i vettori ortogonali a $\mathbf{v}$ costituiscono effettivamente un complemento diretto di $<\mathbf{v}>$. I vettori del complemento ortogonale di $<\mathbf{v}>$ sono i vettori $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0,$$

da cui si ricava l'equazione $2x - y + 3z = 0$, pertanto

$$\mathbf{v}^{\perp} = \{(\alpha, 2\alpha + 3\beta, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =< (1, 2, 0), (0, 3, 1) > . \qquad \square$$

Esercizio 2. Nel piano euclideo reale in cui è fissato un riferimento cartesiano determinare un'equazione del fascio $\mathscr{F}$ di coniche tangenti alla retta $r: \ x + y - 1 = 0$ in $P = (1, 0)$ e alla retta $s: \ 2x + y = 0$ in $Q = (1, -2)$.

1. Determinare le eventuali coniche degeneri di $\mathscr{F}$ e classificarne le coniche generali;
2. determinare un'equazione della conica $\mathscr{C}$ di $\mathscr{F}$ che ha come asse la retta a : $x - y - 1 = 0$ e determinare delle equazioni cartesiane delle rette tangenti a $\mathscr{C}$ nei suoi vertici appartenenti all'asse a;
3. stabilire se la conica $\mathscr{C}$ determinata al punto precedente è tangente ad una iperbole equilatera nei punti in cui è intersecata dalla retta $x = 0$ e, in caso di risposta affermativa, determinare un'equazione cartesiana di tale iperbole.

Svolgimento. Si tratta di determinare un fascio di coniche bitangenti le cui coniche degeneri, pertanto, sono l'unione delle due tangenti in P e in Q e la retta $\overline{P, Q}$ contata due volte. È immediato ricavare che la retta $\overline{P, Q}$ ha equazione $x = 1$, dunque il fascio cercato è

$$\mathscr{F}: \ (x + y - 1)(2x + y) + k(x - 1)^2 = 0, \qquad k \in \mathbb{R},$$

da cui si ricava

$$\mathscr{F}: \ (2 + k)x^2 + y^2 + 3xy - 2x(1 + k) - y + k = 0, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

1. Le coniche degeneri sono già state determinate precedentemente per scrivere l'equazione del fascio. La matrice associata alle coniche del fascio è

$$A_k = \begin{bmatrix} 2 + k & 3/2 & -1 - k \\ 3/2 & 1 & -1/2 \\ -1 - k & -1/2 & k \end{bmatrix}.$$

Per studiare la natura affine delle coniche generali del fascio occorre studiare il determinante

$$\det A_k^* = 2 + k - \frac{9}{4} = k - \frac{1}{4},$$

pertanto se $k = 1/4$ la conica è una parabola, se $k > 1/4$ le coniche sono ellissi mentre se $k < 1/4$ e $k \neq 0$ le coniche sono iperboli. Il fascio contiene un'iperbole equilatera, corrispondente al valore di k per cui $a_{11} + a_{22} = 0$, ovvero $k = -3$. Nel fascio non ci sono circonferenze generalizzate, poiché $a_{12} \neq 0$ per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$.

2. Possiamo intanto osservare che il punto base $P = (1, 0)$ appartiene alla retta a, pertanto sarà uno dei vertici della conica $\mathscr{C}$ cercata. Notiamo inoltre che la retta r tangente in P è ortogonale alla retta a, condizione questa necessaria per l'esistenza della conica $\mathscr{C}$.

   Per determinare la conica possiamo, per esempio, procedere in questo modo. Il punto improprio della retta a è $A_\infty = [(1, 1, 0)]$ e il punto improprio corrispondete alla direzione ortogonale è quindi $A_\infty^\perp = [(-1, 1, 0)]$, quindi affinché a sia asse il suo polo deve essere $A_\infty^\perp$. Calcoliamo quindi la polare di $A_\infty^\perp$ risolvendo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+k & 3/2 & -1-k \\ 3/2 & 1 & -1/2 \\ -1-k & -1/2 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

   da cui si ricava l'equazione $(2k + 1)x + y + 2k + 3 = 0$. Affinché questa retta coincida con la retta a i coefficienti omonimi devono essere proporzionali, pertanto si ricava che $k = -1$, quindi la conica $\mathscr{C}$ ha equazione

$$\mathscr{C} : \; x^2 + y^2 + 3xy - y - 1 = 0.$$

   Determiniamo ora il secondo vertice (oltre a P) di $\mathscr{C}$ appartenente ad a risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy - y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$$

   da cui si ricava facilmente $V = (1/5, -4/5)$. La tangente in V risulta dunque essere la retta parallela a r e passante per V, ovvero

$$t : \; (x - 1/5) + (y + 4/5) = 0.$$

3. Per stabilire se l'iperbole equilatera richiesta esiste e per trovarne, in caso, un'equazione, determiniamo un'equazione del fascio di coniche bitangenti a $\mathscr{C}$ nei punti in cui è intersecata dalla retta di equazione $x = 0$. Notiamo che per scrivere l'equazione del fascio è sufficiente conoscere l'equazione di due coniche distinte appartenenti a tale fascio, quindi nel nostro caso possiamo utilizzare la conica $\mathscr{C}$ che

già conosciamo e la conica degenere costituita dalla retta passante per i punti di tangenza contata due volte, di equazione $x^2 = 0$. Pertanto il fascio avrà equazione

$$\mathscr{F}' : \ x^2 + y^2 + 3xy - y - 1 + kx^2 = 0, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

L'iperbole equilatera corrisponde al valore di k per cui $1 + k + 1 = 0$, ovvero $k = -2$, e ha pertanto equazione

$$\mathscr{I} : \ x^2 - y^2 - 3xy + y + 1 = 0. \qquad \square$$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, si considerino la retta $r : \ x-1 = 0 = z$ e i punti $A = (1, 1, 2)$ e $B = (1, -1, 0)$.

1. Determinare una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathscr{C}$ con centro sulla retta r e passante per A e B;
2. determinare un'equazione cartesiana del luogo $\mathscr{L}$ dei punti delle rette che proiettano $\mathscr{C}$ dal punto $P = (0, 1, 1)$.

Svolgimento. 1. Cominciamo col determinare il centro della circonferenza richiesta, determinando un punto della retta r che sia equidistante da A e da B. La retta r ha equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

pertanto il generico punto di r ha coordinate $R_t = (1, t, 0)$. La condizione di equidistanza è allora

$$d(R_t, A) = \sqrt{(t-1)^2 + 2^2} = \sqrt{(t+1)^2} = d(R_t, B)$$

che risolta è $t = 1$, pertanto il centro della circonferenza è il punto $C = R_1 = (1, 1, 0)$, mentre il raggio sarà proprio la distanza tra tale punto e uno qualsiasi tra i punti A e B, quindi $r = d(C, A) = 2$. La circonferenza cercata, inoltre, è sicuramente contenuta nel piano individuato dai punti A, B e C, per il quale è immediato ricavare l'equazione cartesiana $x = 1$. Si ha dunque che $\mathscr{C}$ può essere scritta come intersezione di tale piano con la sfera che ha centro in C e raggio r, ovvero

$$\mathscr{C} : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4 \\ x - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Il generico punto della circonferenza $\mathscr{C}$ sarà un punto $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ tale che $\alpha = 1$ e $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 + \gamma^2 = 4$, ovvero $Q = (1, \beta, \gamma)$ con l'ulteriore condizione

$$(\beta - 1)^2 + \gamma^2 = 4.$$

Per proiettare tale punto Q da P dobbiamo scrivere un'equazione della retta $\overline{P, Q}$:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{\beta-1} = \frac{z-1}{\gamma-1},$$

ovvero

$$\overline{P, Q}: \begin{cases} (\beta - 1)x = y - 1 \\ (\gamma - 1)z = z - 1, \end{cases}$$

e dunque una rappresentazione parametrica del luogo cercato è

$$\mathscr{L}: \begin{cases} (\beta - 1)x = y - 1 \\ (\gamma - 1)z = z - 1 \\ (\beta - 1)^2 + \gamma^2 = 4. \end{cases}$$

Per determinare un'equazione cartesiana del luogo, come solito, dobbiamo eliminare i parametri, quindi ricaviamo α e β dalle prime due equazioni:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{x+y-1}{x} \\ \gamma = \dfrac{x+z-1}{x}. \end{cases}$$

e sostituiamo nella terza, ottenendo

$$\left(\frac{x+y-1}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{x+z-1}{x}\right)^2 = 4,$$

ovvero, svolti i calcoli,

$$\mathscr{L}: \ 3x^2 - y^2 - z^2 - 2xz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0,$$

che è l'equazione di un cono quadrico con vertice P e conica direttrice la circonferenza $\mathscr{C}$. $\square$