Geometria – Geometria 2

17 marzo 2005

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino il punto C (1, 1), la retta a: $x - y - 3 = 0$ e la parabola Γ: $y = x^2 - x$.

i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di iperboli equilatere aventi C come centro e a come asintoto.

Si tratta di un fascio di iperboli bitangenti: tutte devono essere tangenti ai due asintoti (nel punto improprio).
Costruiamo questo fascio attraverso l'equazione canonica mostrata a pagina 315.

$$\Phi : (x - x_C)(y - y_C) + k = 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) + k = 0$$

$$\Phi : xy - x - y + k + 1 = 0$$

dove il parametro k, reale, regola la "pancia" delle iperboli del fascio.

ii) Si individui l'iperbole Σ del fascio Φ tangente nell'origine del riferimento alla parabola Γ.

Sia O (0, 0) l'origine del riferimento. Notiamo che $O \in \Gamma$ e che c'è solo un'iperbole del fascio Φ che passa per O. Sia essa I.

$$O \in \Phi \Rightarrow k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow I : xy - x - y = 0.$$

Verifichiamo ora che I è tangente a Γ in O.
Utilizziamo il metodo delle polari: la polare di un punto appartenente ad una conica è la retta tangente la conica in quel punto (come spiegato a pagina 293). La polare di O rispetto a I deve essere uguale alla polare di O rispetto a Γ.
Sia M la matrice a cui è associata la conica I (per evitare le frazioni moltiplichiamo ad ambo i membri per 2): M = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

e sia π_I (O): $\underline{O}^T$ M $\underline{X}$ = 0 con $\underline{O}$ il vettore delle coordinate omogenee di O e $\underline{X}$ il vettore delle coordinate omogenee di un generico punto del piano affine reale.

$$\pi_I(O) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_I(O) : x + y = 0.$$

Sia N la matrice relativa alla conica Γ: N = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e π_Γ (O): $\underline{O}^T$ N $\underline{X}$ = 0.

$$\pi_\Gamma(O):\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow\pi_\Gamma(O): x+y=0.$$

Sia pertanto Σ = I: $xy - x - y = 0$.

<u>iii) Si determini il polo P della retta *r*: $x - y - 3 = 0$ rispetto all'iperbole Σ e si stabilisca se P è coniugato di Q (–2, 2) rispetto a Σ.</u>

Il polo di *r* è il punto P tale che $r = \pi_\Sigma(\mathrm{P})$: $\underline{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}\,\underline{\mathrm{X}}$.
Utilizziamo il teorema di reciprocità, come illustrato a pagina 295.
Siano A, B appartenenti ad *r* e *a*, *b* rispettivamente le loro polari rispetto a Σ.
Scegliamo per esempio A (4, 1).
a: $\pi_\Sigma(\mathrm{A})$: $\underline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}\,\underline{\mathrm{X}} = 0$

$$a:\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow a: y=\frac{5}{3}.$$

Sia B (3, 0).
b: $\pi_\Sigma(\mathrm{B})$: $\underline{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}\,\underline{\mathrm{X}} = 0$

$$b:\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow b: x-2y+3=0.$$

$$\text{Ora, }\{\mathrm{P}\}=a\cap b=\begin{cases}a\\ b\end{cases}=\begin{cases}y=\dfrac{5}{3}\\ x-2y+3=0\end{cases}=\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right).$$

Verifichiamo ora se P è coniugato di Q.

P è coniugato di Q $\Leftrightarrow \underline{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}\,\underline{\mathrm{Q}} = 0$.

$$\text{Risulta }\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\ldots=-\frac{14}{3}\neq 0\Rightarrow\text{P e Q non sono coniugati.}$$

<u>iv) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo K descritto dai punti di contatto delle tangenti condotte dal punto T (2, 0) alla generica conica del fascio Φ. Si riconosca K.</u>

Risulta comodo sfruttare la definizione di polare di un punto esterno ad una conica (pagina 294): essa è la retta che congiunge i due punti di contatto con Φ delle due rette tangenti condotte per T.
$\pi_\Phi(\mathrm{T})$: $\underline{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{M'}\,\underline{\mathrm{X}} = 0$ con *M'* matrice relativa alla generica conica di Φ.

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2k+2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_\Phi(T):(2 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2k+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (-1 \quad 1 \quad 2k)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

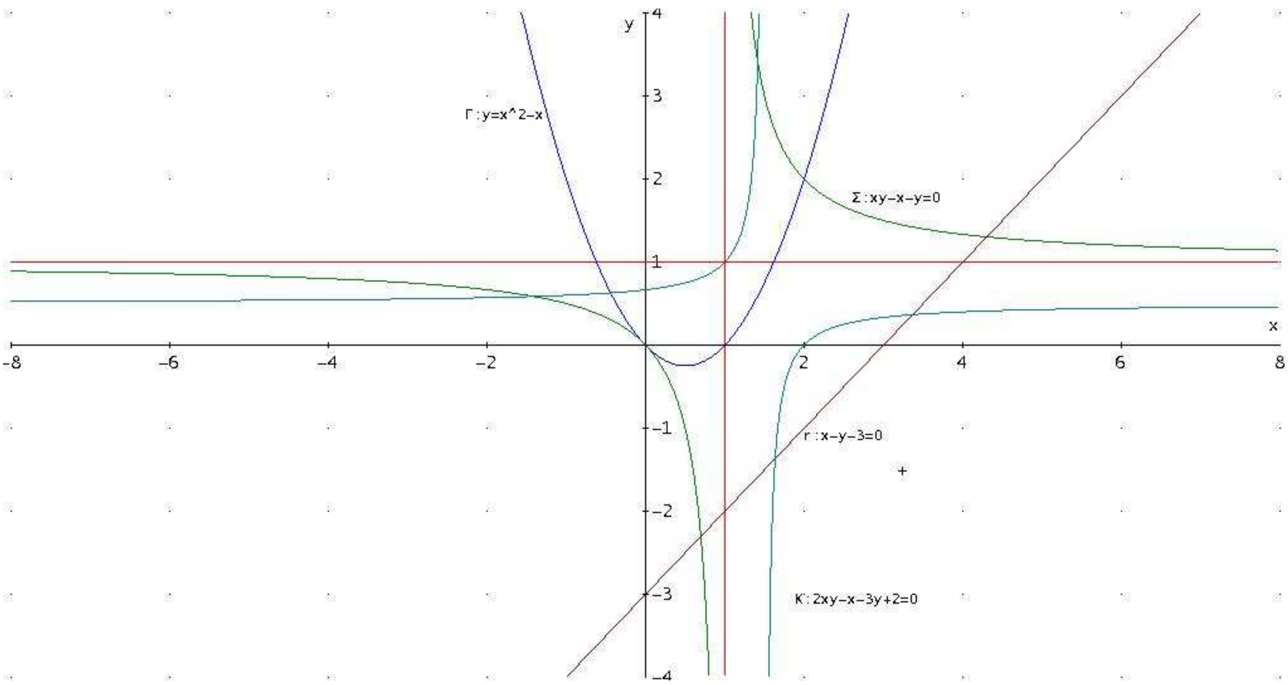
Risulta $\pi_\Phi(T): x - y - 2k = 0$. Il luogo è dato dai punti di tangenza al variare delle coniche del fascio, pertanto è dato dall'intersezione della generica polare con la generica conica del fascio:

$$\mathrm{K}:\begin{cases} x - y - 2k = 0 \\ xy - x - y + k + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{x-y}{2} \\ xy - x - y + k + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow xy - x - y + \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + 1 = 0.$$

Perciò $\mathrm{K}: 2xy - x - 3y + 2 = 0$, la cui matrice è $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Det J = –4 ≠ 0, perciò K non è degenere. $|j_{33}| = -4 < 0$, perciò K è un'iperbole.

Un grafico riassuntivo con tutte le coniche considerate nel problema.



Soluzione a cura di Michele Bolzoni