Algebra lineare – Geometria 1

21 marzo 2005

1) Nello spazio vettoriale **Mat₂(R)** si considerino

la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

il sottoinsieme U = {A ∈ $\mathbf{Mat_2(R)}$ | A + HA = 0},

il sottospazio W = { A = $[a_{ij}]$ ∈ $\mathbf{Mat_2(R)}$ | $2a_{11} - a_{12} = 0$}

e la funzione f: $\mathbf{Mat_2(R)} \to \mathbf{Mat_2(R)}$ tale che ∀ X ∈ $\mathbf{Mat_2(R)}$ | f(X) = HX

i) Dopo aver verificato che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{Mat_2(R)}$, se ne determini una base e la dimensione. Si determinino, inoltre, una base e la dimensione per il sottospazio W.

Scriviamo in forma matriciale gli elementi del sottospazio U così da poter meglio verificare che è sottospazio.

U = {A ∈ $\mathbf{Mat_2(R)}$ | A + HA = 0} =

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0;\ a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = 0;\ a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases};\ a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbf{R} \right\}.$$

Primo metodo. Utilizziamo la **definizione di sottospazio** (pag. 18).

$U \subseteq \mathbf{Mat_2(R)}$ è sottospazio di $\mathbf{Mat_2(R)}$ se

1. ∀ X, Y ∈ U : X + Y ∈ U.

   Siano pertanto $X = \begin{pmatrix} x & h \\ -x & -h \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y & k \\ -y & -k \end{pmatrix}$.

   $$X + Y = \begin{pmatrix} x & h \\ -x & -h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & k \\ -y & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & h+k \\ -x-y & -h-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & h+k \\ -(x+y) & -(h+k) \end{pmatrix} =$$

   $$= \begin{pmatrix} t & t' \\ -t & -t' \end{pmatrix} \in U \text{ , avendo posto } \begin{cases} t := x+y \\ t' := h+k \end{cases}.$$

2. $\forall$ X $\in U$, $\forall\ \alpha \in \mathbf{R}$: αX $\in U$.

   Sia X $= \begin{pmatrix} x & h \\ -x & -h \end{pmatrix}$.

   $$\alpha X = \alpha \begin{pmatrix} x & h \\ -x & -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha h \\ -\alpha x & -\alpha h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t' \\ -t & -t' \end{pmatrix} \in U \text{, avendo posto } \begin{cases} t := \alpha x \\ t' := \alpha h \end{cases}.$$

Pertanto $U \leq$ **Mat$_2$(R)**.

<u>Secondo metodo</u>. Utilizziamo il **criterio di riconoscimento** dei sottospazi (pag. 20).

- ✓ Mostriamo che $U \neq \varnothing$.
  Vero, infatti la matrice nulla vi appartiene (basta porre a=b=0).
- ✓ Mostriamo che, $\forall$ X, Y $\in U$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ si ha che αX + βY $\in U$.
  Siano pertanto X $= \begin{pmatrix} x & h \\ -x & -h \end{pmatrix}$, Y $= \begin{pmatrix} y & k \\ -y & -k \end{pmatrix}$.

  $$\alpha X + \beta Y = \alpha \begin{pmatrix} x & h \\ -x & -h \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y & k \\ -y & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha h \\ -\alpha x & -\alpha h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta y & \beta k \\ -\beta y & -\beta k \end{pmatrix} =$$
  $$= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y & \alpha h + \beta k \\ -\alpha x - \beta y & -\alpha h - \beta k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t' \\ -t & -t' \end{pmatrix} \in U \text{, avendo posto } \begin{cases} t := \alpha x + \beta y \\ t' := \alpha h + \beta k \end{cases}.$$

Concludiamo che $U \leq$ **Mat$_2$(R)**.

<u>Terzo metodo</u>. Proviamo che U è **chiusura** di un opportuno insieme di vettori, e come tale è sottospazio (teorema di pagina …)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbf{R} \right\} =$$
$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

OSSERVAZIONE – *I tre metodi presentati per dimostrare che un certo sottoinsieme finito* U *di vettori di uno spazio vettoriale assegnato è un sottospazio vettoriale sono, dal punto di vista teorico, equivalenti; ma dal punto di vista pratico – applicativo il terzo metodo risulta evidentemente più semplice, elegante e fruttuoso per l'ulteriore svolgimento dell'esercizio (ci procura già anche la base e la dimensione di* U*).*

Con il terzo metodo abbiamo scritto U come chiusura di due matrici. Tali matrici costituiscono una base se sono linearmente indipendenti. Per verificarlo, costruiamo una matrice 4 x 2 dove le colonne sono costituite dai termini, in ordine, letti ad esempio per righe, delle due matrici. Risulta $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il rango è 2, pertanto le due matrici sono linearmente indipendenti. Risulta

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$ e $\dim U = 2$, essendo 2 i vettori della base.

Scriviamo ora anche il sottospazio W in forma matriciale.

$W = \{ A = [a_{ij}] \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid 2a_{11} - a_{12} = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : 2a - b = 0;\ a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = 2a;\ a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ c & d \end{pmatrix};\ a, c, d \in \mathbf{R} \right\} =$

$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ a, c, d \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Come per U, verifichiamo la lineare indipendenza delle tre matrici.

Il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è 3, per cui $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\dim W = 3$.

ii) Si costruiscano i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$.

Partiamo dall'intersezione.

$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in U \wedge \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W \right\}$, con $x,y,z,t \in \mathbf{R}$.

$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \begin{cases} x = a \wedge x = \alpha \\ y = b \wedge y = 2\alpha \\ z = -a \wedge z = \gamma \\ t = -b \wedge t = \delta \end{cases} \right\} = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right\} : \begin{cases} x = a = \alpha \\ y = b = 2\alpha \\ z = \gamma = -a = -\alpha \\ t = \delta = -b = -2\alpha \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ -\alpha & -2\alpha \end{pmatrix} \right\} =$$

$= \left\{ \alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};\ \alpha \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle$, e $\dim(U \cap W) = 1$.

Passiamo ora alla somma. Ricordiamo il teorema di Grassman (pag. 53) per cui

dim (U + W) = dim U + dim W – dim ($U \cap W$) = 2 + 3 – 1 = 4 = dim $\mathbf{Mat_2(R)}$. Segue necessariamente che $U + W =$ $\mathbf{Mat_2(R)}$.

<u>iii) Detto S il sottospazio delle matrici simmetriche di $\mathbf{Mat_2(R)}$, si costruiscano i sottospazi $U \cap S$ e $W \cap S$; si ciascuno di tali sottospazi si determinino una base e la dimensione.</u>

Esplicitiamo S in forma matriciale.

S = {A $\in$ $\mathbf{Mat_2(R)}$ | A = A^t} $= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \right\}$ con $a,b,c,d \in \mathbf{R}$.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$

$$U \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat_2(R)} : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \begin{cases} x = a = \alpha \\ y = b = \beta \\ z = -a = \beta \\ t = -b = \gamma \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \begin{cases} x = a \\ y = -a \\ z = -a \\ t = a \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} ; a \in \mathbf{R} \right\} =$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ;\ a \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ con } B_{U \cap S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e dim } (U \cap S) = 1.$$

$$W \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a \\ c & d \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x = a = \alpha \\ y = 2a = \beta \\ z = c = \beta \\ t = d = \gamma \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x = a \\ y = 2a \\ z = 2a \\ t = d \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ 2a & d \end{pmatrix} ; a, d \in \mathbf{R} \right\} =$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, d \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{con rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

per cui $B_{W \cap S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e dim ($W \cap S$) = 2.

iv) Dopo avere mostrato che la funzione f è un automorfismo, si consideri il sottoinsieme $V = \{X \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid f(X) = X\}$ e si verifichi che V è un sottospazio di $\mathbf{Mat_2(R)}$.

$$f : \mathbf{Mat_2(R)} \to \mathbf{Mat_2(R)}$$
$$X \alpha \ H \cdot X$$

essendo H = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$.

Per dimostrare che f è un automorfismo bisogna dimostrare che

1. f è omomorfismo (i.e. applicazione lineare)
2. f è endomorfismo (i.e. dominio e codominio coincidono)
3. f è monomorfismo (i.e. omomorfismo injettivo)
4. f è epimorfismo (i.e. omomorfismo suriettivo)

1. Dobbiamo provare che, $\forall$ M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, N = $\begin{pmatrix} h & k \\ l & m \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat_2(R)}$, $\forall\ \alpha,\beta \in \mathbf{R}$,

$$f(\alpha M + \beta N) \overset{?}{=} \alpha f(M) + \beta f(N)$$

$f(\alpha M + \beta N) = H \cdot (\alpha M + \beta N) = (*)$
Sfrutto ora la proprietà distributiva del prodotto di matrici rispetto alla somma.
$(*) = H\alpha M + H\beta N = (*)$
Sfrutto ora la proprietà "pseudo-associativa" del prodotto per scalari col prodotto di matrici e permutabilità degli scalari con le matrici.
$(*) = \alpha HM + \beta HN = \alpha f(M) + \beta f(N)$. Perciò f è omomorfismo.

2. Dominio e condominio sono entrambi uguali a $\mathbf{Mat_2(R)}$. È pacifico che f è un endomorfismo.

OSSERVAZIONE *– Ci viene in aiuto il corollario c) di pagina AL15, per cui, essendo* f *un endomorfismo,* f *è iniettivo* $\Leftrightarrow$ f *è suriettivo. Si rivela necessario dimostrare solo una delle due condizioni. Tuttavia per esercizio le dimostriamo entrambe.*

3. ***Primo metodo***. Applicando la definizione di funzione iniettiva, dobbiamo provare che, $\forall$ M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, N = $\begin{pmatrix} h & k \\ l & m \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat_2(R)}$, $f(M) = f(N) \overset{?}{\Rightarrow} M = N$

$$f(M) = f(N) \Rightarrow f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} h & k \\ l & m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & m \\ h & k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = l \\ d = m \\ a = h \\ b = k \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \\ l & m \end{pmatrix} \Rightarrow$ M = N. Perciò f è injettiva.

Secondo metodo. Avendo già dimostrato che f è un omomorfismo, possiamo invocare il teorema 2.a di pagina AL11 per cui

$$f \text{ è monomorfismo} \Leftrightarrow \ker f = \{\underline{0}\}$$

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \underline{0} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} z & t \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \underline{0}.$$ Perciò f è un monomorfismo.

4. ***Primo metodo***. Applicando la definizione di funzione suriettiva, dobbiamo provare che, $\forall$ Y $\in$ **Mat₂(R)**,

$$\overset{?}{\exists}\ X \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid Y = f(X), \text{ cioè } Y = H \cdot X$$

Poiché H è invertibile (infatti det H = $-1 \neq 0$), risulta che la matrice cercata X esiste ed è data da $H^{-1} \cdot Y$. La funzione f risulta pertanto suriettiva.

Secondo metodo. Ricordiamo il teorema 2.b di pagina AL11 per cui

$$f \text{ è epimorfismo} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbf{Mat_2(R)}$$

$$\operatorname{Im} f = \{f(X) \mid X \in \mathbf{Mat_2(R)}\} = \left\{ f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}; a,b,c,d \in \mathbf{R} \right\} =$$

$$= \mathbf{Mat_2(R)}.$$

Un'alternativa molto elegante e meno pedante per verificare che f è un automorfismo consiste nel seguente ragionamento.

Si è osservato poc'anzi che, $\forall \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat_2(R)}$, $f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

Ora, in generale si può provare (con un calcolo banale righe per colonne) che, date due matrici $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat_2(R)}$, si ha che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ \hline c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}.$$

Dunque, in particolare, risulta che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ x & y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ t \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dunque, se in **Mat$_2$(R)** si fissa la base canonica

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, ogni matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sarà rappresentata da un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \varphi_B\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) \in$ $\mathbf{R}^4$, e l'applicazione *f* agisce sui vettori delle componenti nel seguente modo: $\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = L_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \tilde{f}$ è lineare $\Rightarrow$

$\Rightarrow f = (\varphi_B)^{-1} \cdot f \cdot \varphi_B$ è un omomorfismo (endomorfismo).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Mat_2(R)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{Mat_2(R)} \\ {\scriptstyle \phi_B}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (\phi_B)^{-1}} \\ \mathbf{R}^4 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbf{R}^4 \end{array}$$

Poi, per verificare che *f* è un automorfismo, basta osservare che

$$\det\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = -\det{}^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det{}^2 I_2 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 4$$

Esplicitiamo ora in forma matriciale il sottospazio *V*.

$V = \{X \in$ **Mat$_2$(R)** $\mid f(X) = X\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} z & t \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & y \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; x, y \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dunque $V \leq$ **Mat$_2$(R)**.

v) Si verifichi se U e V sono in somma diretta.

Ricordiamo che due sottospazi sono in somma diretta quando la loro somma genera l'intero spazio e la loro intersezione è il vettor nullo. In questo caso:

$$U \oplus V = \mathbf{Mat_2(R)} \Leftrightarrow U + V = \mathbf{Mat_2(R)} \text{ e } U \cap V = \{\underline{0}\}$$

Determiniamo il sottospazio somma.

$$U + V = \langle U \cup V \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Verifichiamo che le matrici siano linearmente indipendenti tramite il calcolo del determinante di una matrice 4 x 4 le cui colonne sono composte dagli elementi ordinati delle quattro matrici del sottospazio somma.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 4 \neq 0.$$

Anziché fare ora calcoli superflui per determinare il sottospazio $U \cap V$, utilizziamo il metodo più veloce e più elegante: ragioniamo sulle dimensioni. Una volta determinato il sottospazio somma e verificato che le sue matrici sono linearmente indipendenti, affermiamo che dim (U + V) = 4, che è la dimensione di $\mathbf{Mat_2(R)}$, per cui tale sottospazio è in grado di generare l'intero spazio.
Poi, per il teorema di Grassman,

$$\dim (U \cap V) = \dim (U + V) - \dim U - \dim V = 4 - 2 - 2 = 0.$$

Il fatto che il sottospazio intersezione abbia dimensione zero, implica che tale sottospazio si riduce alla matrice nulla. Pertanto U e V sono in somma diretta.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} x + hy + (h-1)z = 1 \\ 2x + 2(h-1)y - 2z = 2 - h \\ (h-1)x + y - (h-1)z = 0 \end{cases}$$

ove *h* è un parametro.
Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.
Posto $h = 2$, dopo aver constatato che il sistema è risolubile, si verifichi se l'insieme U delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. In caso di risposta negativa, si costruisca la chiusura di *U*.

Siamo di fronte ad un sistema lineare in $m = 3$ equazioni e $n = 3$ incognite.
Sia M la matrice dei coefficienti delle incognite, con $M \in \mathbf{Mat_3(R)}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & h & h-1 \\ 2 & 2(h-1) & -2 \\ h-1 & 1 & -(h-1) \end{pmatrix}$$

Sia $[M|\underline{b}]$ la matrice completa, con $[M|\underline{b}] \in \mathbf{Mat_{3,4}(R)}$.

$$[M|\underline{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & h-1 & 1 \\ 2 & 2(h-1) & -2 & 2-h \\ h-1 & 1 & -(h-1) & 0 \end{array}\right)$$

Primo metodo. Discutiamo il sistema utilizziamo il teorema di Rouchè – Capelli (illustrato a pagina SL4): un sistema lineare è risolubile $\Leftrightarrow$ rg M = rg $[M|\underline{b}]$.
Per stabilire il rango di M, calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti.

$$\text{Det } M = \begin{vmatrix} 1 & h & h-1 \\ 2 & 2(h-1) & -2 \\ h-1 & 1 & -(h-1) \end{vmatrix} = -2(h-1)^2 - 2h(h-1) + 2(h-1) - 2(h-1)^3 + 2 + 2h(h-1) =$$

$$= -2\left[(h-1)^3 + (h-1)^2 - (h-1) - 1\right] = -2\left[(h-1)^2(h-1+1) - (h-1+1)\right] = -2\left[h(h-1)^2 - h\right] =$$

$$= -2\left\{h\left[(h-1)^2 - 1\right]\right\} = -2\left[h(h-1+1)(h-1-1)\right] = 2h^2(2-h)$$

Tale determinante si annulla per $h = 0$ oppure $h = 2$.

Per $h \neq 0$ e $h \neq 2$, det $M \neq 0 \Rightarrow$ rg (M) = 3.
Ma M è anche minore non-singolare del terz'ordine per $[M|\underline{b}]$.
Quindi anche rg $[M|\underline{b}] = 3$, per cui, per $h \neq 0$ e $h \neq 2$ il sistema è risolubile.
In particolare, quando è risolubile, un sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni (pag. SL10).
In questo caso, per $h \neq 0$ e $h \neq 2$, il sistema ammette $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1!$ soluzione.

Secondo metodo. Discutiamo il sistema con il metodo di eliminazione di Gauss, la cui teoria è spiegata nelle pagine SL17 e seguenti.
Si tratta di "triangolarizzare" il sistema tramite "triangolarizzazione" della matrice dei coefficienti (tenendo a margine e lavorando anche sulla colonna dei termini noti).
Possiamo scambiare le righe tra di loro (che rappresentano le equazioni, per cui non si possono invece scambiare le colonne) oppure sostituirle con una combinazione lineare fra righe.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & h & h-1 \\ 2 & 2(h-1) & -2 \\ h-1 & 1 & -(h-1) \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2-h \\ 0 \end{matrix}.$$

Iniziamo lasciando invariata la prima riga, sostituendo la seconda con il doppio della prima meno la seconda, e sostituendo la terza con la prima più la terza. In tal modo cominciamo a fare comparire uno zero in m_{21}.
In altre parole, dette A, B, C le tre righe della matrice M, operiamo così:

$$\begin{cases} A \to A \\ B \to 2A - B \\ C \to A + C \end{cases} \qquad \text{e otteniamo la matrice} \qquad \begin{pmatrix} 1 & h & h-1 \\ 0 & 2 & 2h \\ h & h+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ h \\ 1 \end{matrix}$$

Modifichiamo ora solo la terza riga: la facciamo diventare h-volte la prima meno la terza ($C \to hA - C$). Naturalmente, poniamo $h \neq 0$. Otteniamo la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & h & h-1 \\ 0 & 2 & 2h \\ 0 & h^2-h-1 & h^2-h \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ h \\ h-1 \end{matrix}$$

in cui è nullo anche il termine m_{31}. Rimane solo da annullare il termine m_{32}.

Lavoriamo sempre solo modificando la terza riga: $C \to \frac{1}{2}B + C$, e otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & h & h-1 \\ 0 & 2 & 2h \\ 0 & h^2-h & h^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ h \\ \frac{3}{2}h-1 \end{matrix}.$$

Continuiamo a lavorare solo sulla terza riga fino ad annullare il termine m_{32}.
$C \to \frac{h}{2}B + C$. Risulta

$$\begin{pmatrix} 1 & h & h-1 \\ 0 & 2 & 2h \\ 0 & h^2 & 2h^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ h \\ \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{2}h-1 \end{matrix}.$$

Sia ora $C \to \frac{h^2}{2}B - C$. Risulta

$$(*)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & h-1 & 1 \\ 0 & 2 & 2h & h \\ 0 & 0 & h^3-2h^2 & \frac{h^3-h^2-3h+2}{2} \end{array}\right).$$

Abbiamo ottenuto così il seguente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x+hy+(h-1)z=1 \\ 2y+2hz=h \\ (h^3-2h^2)z=\frac{h^3-h^2-3h+2}{2} \end{cases}$$

Per la Proposizione di pagina SL18, si ha che un sistema triangolare superiore ammette una e una sola soluzione se e solo se tutti gli elementi della diagonale principale della relativa matrice sono diversi da zero. Nel nostro caso è necessario che $h^3 - 2h^2 = h^2(h - 2) \neq 0$, per cui $h \neq 0$ (condizione già imposta nella procedura di "triangolarizzazione") oppure $h \neq 2$. Abbiamo ottenuto le stesse conclusioni della discussione fatta con il primo metodo.

Analizziamo ora che cosa succede per $h = 0$.
Primo metodo. Riscriviamo le matrici.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad [M|\underline{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE *– È inutile calcolare det M (a meno che lo si faccia a scopo di verifica)! Sappiamo che risulta 0.*

Per forza rg M < 3. Se consideriamo il minore $m_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, ottenuto eliminando la terza riga e la terza colonna, notiamo che esso ha determinante uguale a $-2 \neq 0$. Perciò rg M = 2. Bisogna stabilire ora il rango di [M|b]. Calcoliamo perciò il determinante di ogni minore del terz'ordine ottenuti eliminando una colonna (non la quarta perché risulta ancora M). Ne basta uno non-singolare per far sì che il rango della matrice [M|b] resti a 3.

$$\det M_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2-2+2 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } [M|\underline{b}] = 3 \neq 2 = \text{rg } M.$$

Perciò, per il teorema di Rouchè – Capelli, per $h = 0$, non esiste soluzione.

Secondo metodo. Riprendiamo il processo di "triangolarizzazione" a partire dal passaggio avanti l'avere imposto la condizione $h \neq 0$. Avevamo la seguente matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & h-1 & 1 \\ 0 & 2 & 2h & h \\ h & h+1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Sostituiamo il valore zero al parametro e otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Proseguiamo da qui la "triangolarizzazione" della matrice, lavorando sulla terza colonna che vogliamo diventi $C \to B - 2C$. Risulta $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$, che dà origine al sistema triangolare equivalente $\begin{cases} x - z = 1 \\ 2y = 0 \\ 0 = -2 \end{cases}$, che è impossibile a causa dell'assurdo presente nella terza equazione. D'altra parte, i pivot della matrice incompleta sono infatti 2, diversamente da quelli della matrice completa che sono 3. Dato che i pivot indicano il rango, il sistema è impossibile per Rouché – Capelli.

Analizziamo infine il caso $h = 2$.

Primo metodo.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad [M|\underline{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche qui rg M < 3. Se consideriamo il minore $m_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, ottenuto eliminando la terza riga e la terza colonna della matrice M, esso ha determinante uguale a $-2 \neq 0 \Rightarrow$ rg M = 2.

Per quanto riguarda il calcolo del rango di [M|b], utilizziamo il metodo degli orlati. Partiamo sempre dal minore $m_{334} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (l'abbiamo chiamato m_{334} in quanto ottenuto eliminando la terza riga e la terza e quarta colonna dalla [M|b]), e

consideriamo l'unica sua orlatura dentro [M|b] che non ci dia la matrice M. Otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, il cui determinante è 0.
Il rango di [M|b] scende perciò al rango di M.
Si ha rg M = rg [M|b] = 2 $\Rightarrow$ sistema risolubile.
In particolare esistono $\infty^{3-2} = \infty^1$soluzioni, dipendenti cioè da un parametro che varia in **R**.

<u>Secondo metodo.</u> Utilizziamo la matrice triangolare equivalente ottenuta (*), che diventa $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. I pivot della matrice incompleta sono due così come quelli della matrice completa, per cui da Rouché – Capelli discende che il sistema è risolubile con ∞^1 soluzioni. D'altra parte, la matrice dà origine al sistema equivalente $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2y + 4z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$, che è chiaramente indeterminato essendo sottodeterminato (numero di equazioni minore del numero di incognite).

Procediamo al calcolo delle soluzioni nel caso generale $h \neq 0$ e $h \neq 2$.
<u>Primo metodo.</u> Il sistema risulta essere crameriano (il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite e la matrice dei coefficienti è non-singolare). Pertanto, come spiegato a pagina SL12, le soluzioni possono essere calcolate nel seguente modo.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & h & h-1 \\ 2-h & 2(h-1) & -2 \\ 0 & 1 & -(h-1) \end{vmatrix}}{\det M} = \ldots = \frac{(2-h)(h^2+2h-1)}{2h^2(2-h)} = \frac{(h^2+2h-1)}{2h^2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & h-1 \\ 2 & 2-h & -2 \\ h-1 & 0 & -(h-1) \end{vmatrix}}{\det M} = \ldots = \frac{h(h-1)(h-2)}{2h^2(2-h)} = \frac{1-h}{2h};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ 2 & 2(h-1) & 2-h \\ h-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det M} = \ldots = \frac{1}{2}\frac{(h-2)(-h^2-h+1)}{h^2(2-h)} = \frac{h^2+h-1}{2h^2}.$$

Secondo metodo. Per risolvere un sistema triangolare, partiamo dall'ultima equazione applicando l'algoritmo della "risoluzione all'indietro". Partiamo dalla terza equazione per calcolare la *z*. Ricordiamo che, con una semplice divisione polinomiale, si verifica che $h^3 - h^2 - 3h + 2 = (h-2)(h^2+h-1)$.

Risulta $h^2(h-2)z = \frac{1}{2}(h-2)(h^2+h-1) \Rightarrow z = \frac{h^2+h-1}{2h^2}$.

Risolviamo ora la seconda equazione (rispetto alla *y*).

$$y = \frac{h}{2}(1-2z) = \frac{h}{2}\left(\frac{h^2-h^2-h+1}{h^2}\right) = \frac{1-h}{2h}.$$

Risolviamo infine la prima equazione.

$$x = 1 - hy - (h-1)z = 1 - \frac{(1-h)}{2} - (h-1)\frac{h^2+h-1}{2h^2} =$$

$$= \frac{2h^2 - h^2(1-h) - (h-1)(h^2+h-1)}{2h^2} = \frac{2h^2 - (1-h)(h^2-h^2-h+1)}{2h^2} = \frac{h^2+2h-1}{2h^2}.$$

Calcolo delle soluzioni nel caso *h* = 2.

Primo metodo. Riscriviamo il sistema.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Poiché per *h* = 2 il rango del sistema è 2, sappiamo che basteranno 2 sole equazioni: notiamo che la seconda e la terza equazione sono uguali a meno di un fattore di proporzionalità. Sono legate. Possiamo eliminarne una (ad esempio la seconda). Sappiamo già che le soluzioni saranno in funzione di un parametro. In particolare è un'incognita che passa a parametro. Sia $t := z$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 2y = 1 - t \\ x + y = t \end{cases}$$

Risolviamolo ora tramite sottrazione membro a membro. Risulta $y = 1 - 2t$.

Sostituendo tale risultato nella seconda, otteniamo $x = t - y = t - (1-2t) = 3t - 1$.

L'insieme U delle soluzioni è pertanto U $= \{(x,y,z) = (3t-1, 1-2t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ =

= $(-1,1,0) + \{t(3,-2,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$ = $(-1,1,0) + \langle(3,-2,1)\rangle$.

Secondo metodo. Partiamo dal sistema triangolare equivalente che abbiamo già calcolato essere $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$. Anche stavolta facciamo passare la *z* a parametro *t*.

Dalla seconda equazione risulta $y = 1 - 2t$.

Dalla prima $x = 1 - 2y - t = 1 - 2(1-2t) - t = 3t - 1$.

Verifichiamo tramite il criterio di riconoscimento se U è sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

- ✓ Vediamo se $U \neq \emptyset$.
  Vero, dal momento che il vettore $(-1, 1, 0) \in U$ (basta porre $t = 0$).

- ✓ Vediamo se, $\forall\ \underline{v}, \underline{w} \in U, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} : \alpha\underline{v} + \beta\underline{w} \in U$.
  Siano pertanto $\underline{v} = (3h - 1, 1 - 2h, h)$ e $\underline{w} = (3k - 1, 1 - 2k, k)$.
  $\alpha\underline{v} + \beta\underline{w} = (3h - 1, 1 - 2h, h) + (3k - 1, 1 - 2k, k) =$
  $= (3(h + k) - 2, 2 - 2(h - k), h + k)$ che, in generale, non appartiene a U.

Pertanto U non è sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

Avevamo già calcolato che U = $(-1,1,0), \langle(3,-2,1)\rangle$.
$<U> = \langle(-1,1,0), \langle(3,-2,1)\rangle\rangle \underset{propr.chius.}{=} \langle(-1,1,0),(3,-2,1)\rangle$.

Soluzioni a cura di Michele Bolzoni