Geometria – Geometria 2

27 settembre 2005

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si consideri il fascio di coniche

$$\Phi : x^2 + (k+4)xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 .$$

i) Si riconoscano le coniche generatrici del fascio Φ, si stabilisca la natura del fascio, se ne determinino i punti base e le coniche degeneri.

Riscriviamo l'equazione del fascio lasciando per ultimi i termini dipendenti dal parametro *k*.

$$\Phi : x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 2y + 1 + kxy = 0$$

Individuiamo così le equazioni di due coniche, la prima indipendente e la seconda dipendente dal parametro:

$$C_1 : x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0;$$
$$C_2 : xy = 0$$

Analizziamo C_1. Innanzitutto verifichiamo se è degenere o meno. Sia C_1' l'ampliamento projettivo di C_1, la cui equazione (omogenea) si ottiene ponendo $x := \frac{x_1}{x_3}$ e $y := \frac{x_2}{x_3}$ (pag. 260) e moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per x_3. Si ottiene

$$C_1' : x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$$

Ricordando la scrittura di una conica in forma matriciale, si ha che una conica ha la seguente equazione:

$$C\text{: } X^t\, A\, X = 0,$$

con X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e A = $[a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$. Sviluppando si ottiene

$$C : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 . \; (*)$$

Pertanto, riconducendo la nostra conica C_1' alla (*), siamo in grado di scrivere la matrice A tale che C_1': $X^t\, A\, X = 0$.

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Per il teorema di pagina 276, C_1 è generale $\Leftrightarrow$ rg A = 3.

det A = 1 +2 + 2 –1 –1 –4 = –1 $\neq$ 0 $\Rightarrow$ rg A =3. C_1 è generale.
Avendo già scritto la matrice risulta comodo l'enunciato del teorema di pag. 298, che permette di determinare il tipo affine di C_1 in base al minore a_{33} (l'invariante quadratico). Si ha che

$|a_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0 \Rightarrow C_1$ è un'iperbole.

Analizziamo ora C_2. La sua equazione è già scritta come prodotto di due fattori.

$$C_2 : xy = 0 \Rightarrow C_2 : x = 0 \cup y = 0$$

Essa è pertanto degenere, è l'unione delle due rette che coincidono con gli assi cartesiani e il suo punto doppio è l'origine del sistema.

Per stabilire la natura del fascio, analizziamo i punti base determinando le intersezioni delle coniche generatrici.

$$\begin{cases} C_1 \\ C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} (y-1)^2 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (x-1)^2 \\ y = 0 \end{cases}$, che dà origine ai seguenti punti base:

A = B = (0, 1); C = D = (1, 0)

Si tratta pertanto di un fascio di coniche bitangenti (caso n° 3 di pagina 287).
Ogni fascio di questo tipo contiene esattamente 3 coniche degeneri reali, formate dalle tre coppie di rette che congiungono a due a due i punti base:

D_1: AB $\cup$ CD; D_2: AC $\cup$ BD; D_3: AD $\cup$ BC

Nel nostro caso, sono tre coniche non distinte (D_2 = D_3), con D_1 semplicemente degenere e D_2 doppiamente degenere (D_2 = D_3 = AC $\cup$ AC).

Scriviamo l'equazione della retta r passante per A e per C con, ad esempio, la regola di pagina 309 che discende dalla condizione di allineamento di tre punti.

$$r : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r : x + y - 1 = 0 \Rightarrow D_2 = D_3 : (x + y - 1)^2 = 0 .$$

Rimane una sola conica degenere nel fascio: per forza di cose, è la seconda generatrice. $D_1 = C_2 : xy = 0$ per ottenere la quale non esiste alcun valore di k essendo il fascio scritto in forma ridotta.

ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se nel fascio Φ vi sono circonferenze, parabole e iperboli equilatere non degeneri.

Generalizziamo ora la matrice A alla una generica conica del fascio, non a una in particolare.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k+4}{2} & -1 \\ \frac{k+4}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La circonferenza è un caso particolare di ellisse in cui $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$.
La prima condizione è sempre vera, la seconda implica che $\frac{k+4}{2} = 0 \Rightarrow k = -4$. Verifichiamo che, per tale valore del parametro, la conica corrispondente non è degenere:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0$. Pertanto nel fascio vi è una circonferenza non degenere.

Per ottenere parabole, lavoriamo sull'invariante quadratico e imponiamo che

$|a_{33}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{k+4}{2} \\ \frac{k+4}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{k+4}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{k+4}{2}\right)\left(1 - \frac{k+4}{2}\right) = 0 \Rightarrow$ $k = -2 \vee k = -6$. Per tali valori del parametro si ottengono parabole. Verifichiamo che non siano degeneri.

Con $k = -2$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ è degenere $\Rightarrow$ si tratta necessariamente della conica D_2 (= D_3). Abbiamo infatti visto che per la D_1 (che è l'unica altra conica degenere del fascio) non esiste valore del parametro in grado di darne l'equazione. Pertanto l'unica conica degenere del fascio ridotto è questa parabola degenere, che si ottiene per $k = -2$. Qualsiasi altra conica del fascio di cui ci sarà chiesto di verificare se non sia degenere, risponderemo a priori positivamente.

OSSERVAZIONE *– In questo esercizio siamo "avvantaggiati": sappiamo che le coniche distinte degeneri del fascio sono solo 2. Ma se ci fossero tre coniche degeneri (i.e. il fascio fosse di un altro tipo), non godremmo di tale vantaggio e non potremmo azzardare questo tipo di deduzioni.*

Per quanto poc'anzi osservato, per $k = -6$ otteniamo una parabola non degenere. Pertanto nel fascio vi è una parabola non degenere.

La condizione che permette di ottenere iperboli equilatere è che $a_{11} + a_{22} = 0$ (pag. 311). Ciò implica $1 + 1 = 0 \Rightarrow 2 = 0$ falso. Pertanto nel fascio non vi sono iperboli equilatere.

<u>iii) Si individui la conica Σ non degenere del fascio Φ che ha come diametro la retta</u> d: $x - 1 = 0$. <u>Si riconosca Σ.</u>

Un diametro è una retta passante per il centro (definizione pag. 302).
Calcoliamo perciò il luogo dei centri delle coniche del fascio in funzione del parametro con il metodo delle derivate parziali.

$$Centro = (x_C, y_C) = \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + (k+4)y - 2 = 0 \\ (k+4)x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Risolviamo questo sistema lineare in 2 equazioni e 2 incognite con il metodo di Cramer.

$$Centro = \begin{cases} x_C = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & k+4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k+4 \\ k+4 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2(k+2)}{(2+k+4)(2-k-4)} = \dfrac{2}{k+6} \\ y_C = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ k+4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k+4 \\ k+4 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2(k+2)}{(2+k+4)(2-k-4)} = x_C = \dfrac{2}{k+6} \end{cases}$$

Imponiamo che il centro appartenga al diametro:

$$Centro \in d \Rightarrow x_C - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2}{k+6} = 1 \Rightarrow 2 = k + 6 \Rightarrow k = -4 .$$

OSSERVAZIONE *– Nel risolvere l'equazione elementare* $\dfrac{2}{k+6} = 1$ *abbiamo moltiplicato per* $k + 6$ *ambo i membri senza porre particolari condizioni. Ciò è dovuto al fatto che per* $k = -6$ *abbiamo visto che si ottiene la parabola, che non è una conica a centro.*

Pertanto la conica Σ avente come diametro la retta d è $\Sigma : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Avevamo già incontrato il valore $k = -4$. Sappiamo già che per tale valore di ottiene la circonferenza. Pertanto Σ è una circonferenza.

<u>iv) Si verifichi che il polo della retta $r: x+y-1=0$ non dipende dalla conica non degenere del fascio.</u>

È sufficiente osservare che la retta r compone la conica doppiamente degenere (la $D_2 = D_3$) 3 dunque passa per i due punti base del fascio di coniche tangenti (A = B e C = D). Come tale risulta essere la polare del punto di intersezione delle due tangenti (formanti l'altra conica degenere del fascio, la D_1), che è l'origine O = (0,0) del riferimento. Tutto questo avviene indipendentemente dalla conica (non degenere) del fascio Φ che si considera.
Mostriamo ugualmente anche il procedimento con i calcoli, anche se in questo caso è da evitare, fatte le precedenti considerazioni.

Passiamo innanzitutto all'ampliamento projettivo.
Calcoliamo il polo della retta $r': x_1 + x_2 - x_3 = 0$ secondo la generica conica del fascio con il teorema di reciprocità illustrato a pagina 295. Sia $r' = \pi$ (R) (la polare di R). Noi cerchiamo R.
Siano P e Q due punti comodi appartenenti a r'.
Scegliamo P = [(1, 0, 1)] e Q = [(0, 1, 1)]. Consideriamone le polari:

$$p' = \pi(P); \quad q' = \pi(Q).$$

Calcoliamo p', luogo dei punti coniugati di P. $\Rightarrow p'$: $(X_P)^t A X = 0$.

$$p':\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{k+4}{2} & -1\\ \frac{k+4}{2} & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & \frac{k+2}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow p': x_2 = 0$$

Analogamente calcoliamo q, luogo dei punti coniugati di Q. ⇒ q: $(X_Q)^t A X = 0$.

$$q':\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{k+4}{2} & -1\\ \frac{k+4}{2} & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\frac{k+2}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow q': x_1 = 0$$

{R} = $p' \cap q'$ che, tornando alla chiusura projettiva, risulta essere l'origine del riferimento cartesiano: R = (0, 0) che, come si vede, non dipende dal parametro, quindi è lo stesso per ogni conica non degenere del fascio (ricordiamo che se la conica è degenere, R è un punto doppio, e la sua polare non è una retta ma l'intero piano).

v) Si determini l'equazione della conica Γ che ammette un asintoto parallelo alla retta $s: 3x + y + 7 = 0$. Si determinino le equazioni degli asintoti di Γ.

Ricordando come si calcolano i parametri direttori di una retta data in forma cartesiana (pag. 213), sia ha che p.d. $s = [(l, m)] = [(-1, 3)]$.
Rette parallele hanno parametri direttori proporzionali (pag. 212).
Imponiamo che i parametri direttori di s siano uguali a quelli di un asintoto di $\Gamma \in \Phi$.
Le direzioni dei due asintoti, come spiegato a pagina 303, sono le soluzione della seguente equazione: $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$ (*)
Pertanto $1 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot \dfrac{k+4}{2} \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 = 0 \Rightarrow 1 - 3(k+4) + 9 = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{2}{3}$.
La conica cercata risulta avere equazione $\Gamma: 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$ e l'equazione cartesiana dei suoi asintoti, come mostrato sempre a pagina 303, risulta essere una conica degenere avente punto doppio nel centro della conica:

$$A: a_{11}(x - x_C)^2 + 2a_{12}(x - x_C)(y - y_C) + a_{22}(y - y_C)^2 = 0$$

Il centro, in questo caso, è $Centro = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{k+6}, \dfrac{2}{k+6}\right) \\ k = -\dfrac{2}{3} \end{cases} = \left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$

Allora risulta $A: \left(x - \dfrac{3}{8}\right)^2 + \dfrac{10}{3}\left(x - \dfrac{3}{8}\right)\left(y - \dfrac{3}{8}\right) + \left(y - \dfrac{3}{8}\right)^2 = 0$.
Non possiamo però fermarci qui poiché sono chieste le equazioni (plurale) degli asintoti. Pertanto dobbiamo determinare le due rette in cui si spezza la conica A.
Sviluppando i calcoli risulta

$$A: 12x^2 + 12y^2 + 40xy - 24x - 24y + 9 = 0.$$

Non è purtroppo immediato ricavarle da questa espressione. Tuttavia sappiamo già l'equazione di un asintoto: è la retta parallela alla retta s data e passante per il centro.
Sia perciò $\Im_1: 3x + y + \lambda = 0$ il fascio improprio di rette aventi tutte la stessa direzione di s. Imponiamo il passaggio per il centro: $3 \cdot \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{3}{2}$.
Abbiamo perciò che $as_1: 6x + 2y - 3 = 0$.
Per calcolare l'equazione del secondo asintoto, proponiamo due strade.
Primo metodo. Cerchiamo i suoi parametri direttori.

Ricordando la (*), calcoliamo l tenendo $m = 3$ e, chiaramente, con $k=-\frac{2}{3}$.

Otteniamo $1\cdot l^2+\left(-\frac{2}{3}+4\right)l\cdot 3+1\cdot 3^2=0\Rightarrow l^2+10l+9=0\Rightarrow l=-1\vee l=-9$.

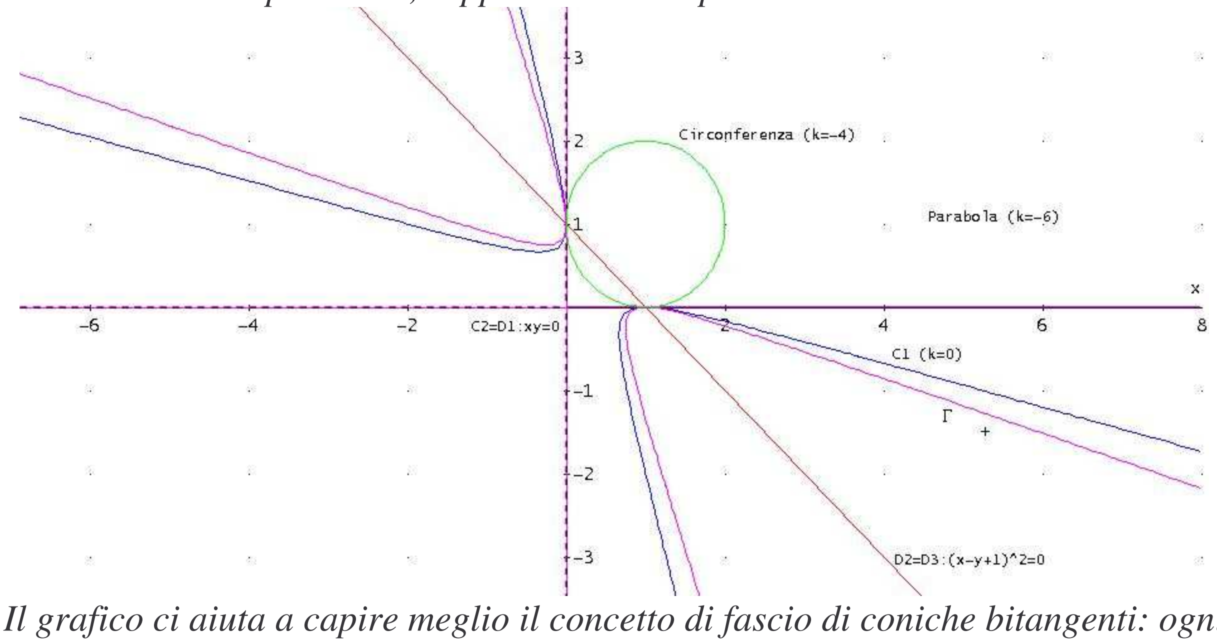
$(l,m)=[(-1,3)]$ è la coppia di p. d. per as_1.
Sia pertanto $(l,m)=[(-9,3)]=[(-3,1)]$ la coppia di p. d. per as_2.
Detto $\Im_2: x+3y+\mu=0$ il fascio improprio di rette aventi come parametri direttori la coppia [(–3, 1)], imponiamo il passaggio per il centro: $\frac{3}{8}+3\frac{3}{8}+\mu=0\Rightarrow\mu=-\frac{3}{2}$.

Risulta $as_2: 2x+6y-3=0$.

<u>Secondo metodo.</u> Dividiamo il polinomio al primo membro dell'equazione della conica degenere A per il polinomio al primo membro della retta as_1, come segue.

$12x^2$	$12y^2$	$40xy$	$-24x$	$-24y$	9	$6x$	$2y$	-3
$-12x^2$		$-4xy$	$6x$			$2x$	$6y$	-3
//	$12y^2$	$36xy$	$-18x$	$-24y$	9			
	$-12y^2$	$-36xy$		$18y$				
	//	//	$-18x$	$-6y$	9			
			$18x$	$6y$	-9			
			//	//	//			

Al termine dell'esercizio, proponiamo il disegno di tutte le coniche considerate nel problema, rappresentate nel piano cartesiano.



Il grafico ci aiuta a capire meglio il concetto di fascio di coniche bitangenti: ogni conica, come si vede, passa per A = B = (0, 1) e per C = D = (1, 0) e ha per tangenti in quei punti due rette, che in questo caso sono gli assi cartesiani.

<u>2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino il punto</u> A(1, 0, 1) <u>e i piani</u> $\pi: x+\left(h^2+1\right)y-z=2-h$ <u>e</u> $\sigma: 2x+\left(5-h^2\right)y-2h^2z=2h$ <u>ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.</u>

<u>i) Al variare di h si stabilisca la posizione reciproca dei piani π e σ.</u>

La posizione reciproca fra piani è illustrata a pagina 224 dal punto di vista analitico tramite la teoria dei sistemi lineari.

$$\pi \cap \sigma = \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases} = \begin{cases} x+\left(h^2+1\right)y-z=2-h \\ 2x+\left(5-h^2\right)y-2h^2z=2h \end{cases}$$

La matrice del sistema è pertanto [M|b] = $\begin{pmatrix} 1 & h^2+1 & -1 & 2-h \\ 2 & 5-h^2 & -2h^2 & 2h \end{pmatrix}$.

Calcoliamo il rango di M vedendo per quali valori si annullano i minore del 2°ordine ottenuti eliminando una colonna.

det M_1 = $\begin{vmatrix} h^2+1 & -1 \\ 5-h^2 & -2h^2 \end{vmatrix} = -2h^4-3h^2+5 = -\left(2h^4-2h^2+5h^2-5\right) = -\left[2h^2\left(h^2-1\right)+5\left(h^2-1\right)\right] =$

$= -\left(2h^2+5\right)\left(h^2-1\right) = -\left(2h^2+5\right)\left(h+1\right)\left(h-1\right)$, che si annulla per $h = \pm 1$

det M_2 = $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2h^2 \end{vmatrix} = -2h^2+2 = -2\left(h^2-1\right) = -2\left(h+1\right)\left(h-1\right)$, che si annulla per $h = \pm 1$

det M_3 = $\begin{vmatrix} 1 & h^2+1 \\ 2 & 5-h^2 \end{vmatrix} = -3h^2+3 = -3\left(h^2-1\right) = -3\left(h+1\right)\left(h-1\right)$, che si annulla per $h = \pm 1$

Esistono due valori di h per i quali tutti i minore d'ordine 2 si annullano.
Pertanto se $h \neq 1$ e $h \neq -1$: rg M = rg [M|b] = 2 $\Rightarrow$ il sistema è compatibile per il teorema di Rouché – Capelli. In particolare, il sistema ha n = 3 incognite, pertanto esistono $\infty^{n-rg} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Pertanto l'intersezione dei piani risulta una retta e i piani sono incidenti.

Vediamo ora che cosa succede per h = 1.

[M|b] = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Si vede che la seconda riga è il doppio della prima, pertanto rg M = rg [M|b] = 1. Il sistema è compatibile ed esistono ∞^2 soluzioni. Si ha, cioè, che i piani sono coincidenti: π = σ.

Analizziamo infine il caso h = –1.

$[M|\underline{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Considerando il minore ottenuto unendo la prima e la quarta colonna, esso non è singolare. Pertanto $1 = \text{rg } M \neq \text{rg } [M|\underline{b}] = 2 \Rightarrow$ non esistono soluzioni. I piani sono paralleli: $\pi \parallel \sigma$ con $\pi \neq \sigma$.

<u>Posto $h = 0$</u>
<u>ii) dopo aver verificato che i piani π e σ sono incidenti in una retta r, si determini la distanza di A da r;</u>

Il caso $h = 0$ rientra nel caso generale $h \neq \pm 1$, pertanto i piani sono incidenti nella retta $r: \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases} = \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$.
Per calcolare la distanza d(A, r) procediamo come illustrato alle pagine 252-3 con una piccola variante: teniamo le equazioni di r in forma cartesiana senza ricorrere alla forma parametrica.
Il punto A non appartiene alla retta, infatti le sue coordinate non soddisfano alle equazioni della retta.
Scriviamo ora l'equazione del piano α passante per A e perpendicolare a r.
Innanzitutto occorrono i parametri direttori di r, che possiamo calcolare con il metodo dei minori di pagina 232.

$$l = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5\,;\ m = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\,;\ n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3.$$

Ricordando ora la condizione di ortogonalità retta – piano (pag. 248), si ha che il piano $\alpha : ax + by + cz + d = 0 \perp r \Leftrightarrow$ la terna (l, m, n) è proporzionale alla terna (a, b, c). Sia pertanto $\alpha : 5x - 2y + 3z + d = 0$, cui imponiamo il passaggio per A.
$A \in r \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -8$. Per cui $\alpha : 5x - 2y + 3z - 8 = 0$.

Sia ora il punto H l'intersezione del piano con la retta:
$H = \begin{cases} \alpha \\ r \end{cases} = \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 8 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$. È un sistema lineare in tre equazioni e tre incognite che risolviamo con la regola di Cramer.

$$x_H = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-5\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{4 + 15 - 6 + 25} = \frac{-70}{38} = -\frac{35}{19}\,;$$

$$y_H = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{38} = \frac{2\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{38} = -\frac{28}{38} = -\frac{14}{19};$$

$$z_H = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{38} = \frac{-8+40-16-50}{38} = -\frac{34}{38} = -\frac{17}{19}.$$

H = $\left(-\frac{35}{19}, -\frac{14}{19}, -\frac{17}{19}\right)$; d(A,r) = d(A,H) = $\sqrt{\left(1+\frac{35}{19}\right)^2 + \left(\frac{14}{19}\right)^2 + \left(1+\frac{17}{19}\right)^2} = \frac{2}{19}\sqrt{1102}$.

iii) si scrivano le equazioni della retta passante per A e parallela a r;

Abbiamo il punto A (origine) e un sottospazio vettoriale W_1 = <(l, m, n)> formato dalla terna dei parametri direttori di r che sono gli stessi di s dato che le vogliamo parallele. È immediato costruire la retta s = [A, W_1] (pagina 216):

$$s: \begin{cases} x = x_A + lt \\ y = y_A + mt \\ z = z_A + nt \end{cases} = \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}.$$

iv) si scrivano le equazioni della circonferenza avente centro in A e tangente alla retta r.

Iniziamo innanzitutto a scrivere l'equazione della sfera di centro A e tangente a r. Quest'ultimo fatto implica che il raggio della sfera è proprio la distanza fra A e r.
Partendo quindi dalla definizione di sfera come luogo dei punti dello spazio equidistanti dal centro:

$$S: (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = (raggio)^2 \Rightarrow S: (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{232}{19}.$$

La circonferenza è data dall'intersezione della sfera con il piano perpendicolare a r passante per il centro che abbiamo già peraltro calcolato (è α). Pertanto, sviluppando i calcoli, risulta

$$crf: \begin{cases} S \\ \alpha \end{cases} = \begin{cases} 19x^2 + 19y^2 + 19z^2 - 38x - 38z = 194 \\ 5x - 2y + 3z = 8 \end{cases}.$$