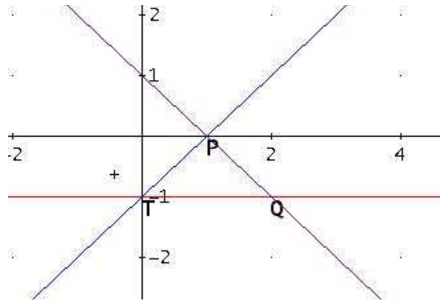
Geometria – Geometria 2

28 giugno 2006

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino i punti P(1; 0), Q(2; −1), T(0; −1).
i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti all'asse y e passanti per i punti P, Q, T.

Si tratta di un fascio di coniche tangenti (caso n° 2 di pagina 286): tutte le coniche passano per T e hanno in comune la stessa retta tangente t: $x = 0$ (asse delle ordinate). Il fascio contiene solo due coniche degeneri distinte:

$$D_1 : t \cup r_{PQ} \qquad D_2 : r_{PT} \cup r_{QT} .$$



La retta per PQ è la bisettrice del secondo e quarto quadrante traslata di 1 verso l'alto. Ha equazione $y = -x + 1 \Rightarrow r_{PQ}$: $x + y - 1 = 0$.
La retta per PT è la bisettrice del primo e terzo quadrante traslata di 1 verso il basso. Ha equazione $y = x - 1 \Rightarrow r_{PT}$: $x - y - 1 = 0$.
La retta per TQ ha sempre ordinata pari a −1. Ha equazione $y = -1 \Rightarrow r_{TQ}$: $y + 1 = 0$.
Le coniche degeneri risultano

$$D_1 : x(x+y-1)=0 \qquad D_2 : (y+1)(x-y+-1)=0 .$$

L'equazione del fascio si ottiene combinando linearmente le equazioni delle due coniche degeneri.

$$\Phi : \alpha x(x+y-1)+\beta(y+1)(x-y-1)=0 .$$

Ponendo $\beta \neq 0$ e $\frac{\alpha}{\beta} := k$ otteniamo l'equazione del fascio in forma ridotta.

$$\Phi : (y+1)(x-y-1)+kx(x+y-1)=0 \text{ e, sviluppando,}$$

$$\Phi : kx^2+(k+1)xy-y^2+(1-k)x-2y-1=0 .$$

In tale fascio, essendo ridotto, non esiste valore di k in grado di dare l'equazione di D_1. L'unica conica degenere del fascio è la D_2 che si ottiene per $k = 0$. Tutte le altre coniche del fascio sono generali, faremo a meno di verificarlo ogni volta che sarà richiesto.

ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se nel fascio Φ ci sono parabole non degeneri e circonferenze non degeneri.
Scriviamo innanzitutto la matrice dell'equazione del fascio visto come Φ: $X^T A X$.

$$A = \begin{pmatrix} k & \frac{k+1}{2} & \frac{1-k}{2} \\ \frac{k+1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1-k}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per la parabola lavoriamo sull'invariante quadratico (il minore a_{33}). Si ottengono parabole se e solo se $|\, a_{33} \,| = 0$.

$$\begin{vmatrix} k & \frac{k+1}{2} \\ \frac{k+1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow k^2 + 6k + 4 = 0 \Rightarrow k = -3 - 2\sqrt{2} \vee k = -3 + 2\sqrt{2}.$$

Sì, nel fascio ci sono 2 parabole non degeneri.

Per la circonferenza lavoriamo ancora sulla matrice. Imponiamo $\begin{cases} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = 0 \end{cases}$.

Il sistema è compatibile e risulta $k = -1$.
Concludiamo che nel fascio c'é una circonferenza non degenere.

<u>iii) Dopo avere verificato che nel fascio Φ esiste un'iperbole equilatera non degenere Σ, se ne determini l'equazione; si scrivano le equazioni degli asintoti di Σ.</u>

La condizione per ottenere l'iperbole equilatera lavorando sulla matrice è che $a_{11} + a_{12} = 0 \Rightarrow k = 1$. L'iperbole è

$$\Sigma : x^2 + 2xy - y^2 - 2y - 1 = 0$$

Per trovare gli asintoti occorre prima calcolare il centro di Σ. Adoperiamo il metodo delle derivate parziali.

C = $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$. Risolvendo il sistema tramite, per esempio, sottrazione membro a membro risulta C = $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Gli asintoti, come spiegato alle pagine 302 e 303, sono le due rette in cui si spezza la conica degenere

$$A : a_{11}(x - x_C)^2 + 2a_{12}(x - x_C)(y - y_C) + a_{22}(y - y_C)^2 = 0$$

Sviluppando, $A : 2x^2 + 4xy - 2y^2 - 4y - 1 = 0$

Se vogliamo calcolare le due equazioni, "traffichiamo" algebricamente sulla conica A. Sostituiamo il termine $-2y^2$ con l'equivalente $+2y^2 - 4y^2$ e osserviamo che i primi tre e gli ultimi tre monomi sono lo sviluppo di quadrato.

$$A:\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2}y\right)^2-(2y+1)^2=0$$

Segue $A:\left(\sqrt{2}x+\left(2+\sqrt{2}\right)y+1\right)\left(\sqrt{2}x+\left(-2+\sqrt{2}\right)y-1\right)=0$

con $as_1:\sqrt{2}x+\left(2+\sqrt{2}\right)y+1=0$ e $as_2:\sqrt{2}x+\left(-2+\sqrt{2}\right)y-1=0$.

<u>iv) Si individui la conica K di Φ che ammette la retta d: $x-2y+2=0$ come diametro; si riconosca K.</u>

Lo si svolga come esercizio ricalcando il punto iv dell'esercizio 1 del tema esame di Geometria 2 del 27 settembre 2005.

Risulta $k=-\dfrac{1}{6}$; $\mathrm{K}:x^2-5xy+6y^2-7x+12y+6=0$ (è un'iperbole)

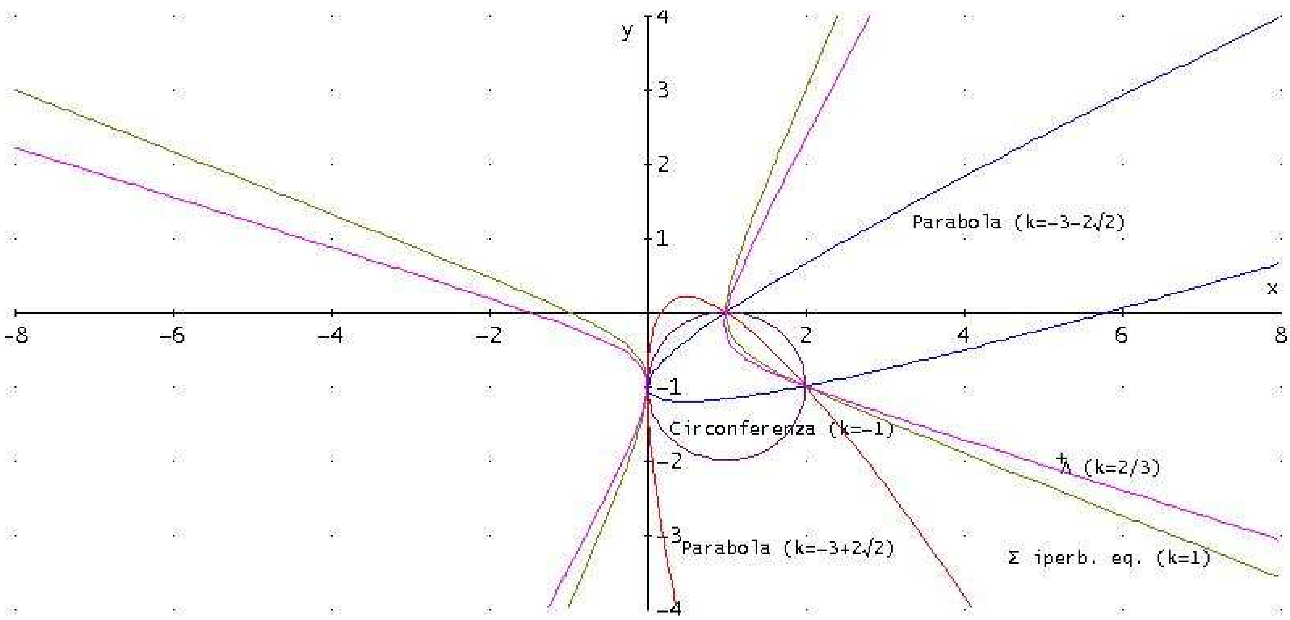
<u>v) Si determini l'equazione dell'iperbole Λ di Φ che ammette un asintoto parallelo alla retta</u> r: $2x-y=0$; <u>si scrivano poi le equazioni degli asintoti di Λ.</u>

Lo si svolga come esercizio ricalcando il punto iv dell'esercizio 1 del tema esame di Geometria 2 del 27 settembre 2005.

Risulta $k=\dfrac{2}{3};\Lambda:2x^2+5xy-3y^2+x-6y-3=0$.

Gli asintoti sono $as_1:98x-49y-77=0;as_2:7x+21y+9=0$.

Al termine proponiamo un grafico riassuntivo con le coniche appartenenti al fascio Φ considerate nel problema: si nota che passano tutte per i punti base e sono tutte tangenti all'asse delle ordinate.



2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si consideri la funzione φ: $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tale che, qualunque siano $v = (x, y, z)$ e $v' = (x', y', z')$ vettori di $\mathbf{R}^3$, si abbia

$$\varphi(v, v') = (k-h)xx' + (k-1)x^2 + h^3xy' + hxz' + hyx' + (1+k-h)yy' + (k+h^2)yz' + hzx' + (h+k)zy' + zz'$$

ove h e k sono parametri reali.
Si stabilisca per quali valori di tali parametri la funzione φ
i) è un forma bilineare;

Applichiamo allo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ il teorema di rappresentazione delle forme bilineari (pag. 147). Fissata una base $B = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, e dati

$\underline{v} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3$; $\underline{v'} = x'\underline{e}_1 + y'\underline{e}_2 + z'\underline{e}_3$, si ha

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v'}) = a_{11}xx' + a_{12}xy' + a_{13}xz' + a_{21}yx' + a_{22}yy' + a_{23}yz' + a_{31}zx' + a_{32}zy' + a_{33}zz' \quad (*)$$

L'unico termine che non si addice a tale rappresentazione è $(k-1)x^2$, che, affinché φ risulti una forma bilineare, deve annullarsi. Quindi

$$\varphi \text{ è forma bilineare} \Leftrightarrow k-1=0 \Leftrightarrow k=1$$

ii) è un prodotto scalare;

Possiamo procedere in due modi.
Il primo consiste nell'applicare la definizione di prodotto scalare (forma bilineare simmetrica). Si pone $\varphi(\underline{v}, \underline{v'}) = \varphi(\underline{v'}, \underline{v})$:

$$(1-h)xx' + h^3xy' + hxz' + hyx' + (2-h)yy' + (1+h^2)yz' + hzx' + (h+1)zy' + zz' =$$
$$= (1-h)x'x + h^3x'y + hx'z + hy'x + (2-h)y'y + (1+h^2)y'z + hz'x + (h+1)z'y + z'z$$

Ricordando che a gradi uguali corrispondono coefficienti uguali (principio d'identità dei polinomi), risulta (trascurando le identità e scrivendo equazioni uguali una sola volta)

$$\begin{cases} h^3 = h \\ h^2+1 = h+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(h-1)(h+1) = 0 \\ h(h-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow h=0 \vee h=1.$$

Sono essi i valori del parametro che rendono φ un prodotto scalare.
Il secondo metodo consiste nello scrivere la matrice A dei coefficienti della forma bilineare conformemente al teorema di rappresentazione (*). Risulta:

$$A=\begin{pmatrix} 1-h & h & h \\ h^3 & 2-h & h+1 \\ h & h^2+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricordando il teorema (pag. 151), una forma bilineare è simmetrica se e solo se la sua matrice A è simmetrica.
Pertanto, ponendo i termini $a_{ij}=a_{ji}\forall 1\le i,j\le 3$, si arriva allo stesso sistema ottenuto con il primo modo e alle stesse soluzioni.

<u>iii) è un prodotto scalare definito positivo.</u>

Iniziamo qui a separare i casi in cui φ è un prodotto scalare.

<u>1° CASO:</u> $h=0$

Anche qui ci sono due modi.
Il primo ricalca la definizione (pag. 162): un prodotto scalare è definito positivo quando, detta $q(\underline{v})=\varphi(\underline{v},\underline{v})$ la forma quadratica associata,

$$\forall \underline{v}\in V, q(\underline{v})\ge 0 \quad \text{e} \quad q(\underline{v})=\underline{0}\Leftrightarrow \underline{v}=\underline{0}.$$

Ora, risulta $\varphi(\underline{v},\underline{v}')=xx'+2yy'+zz'+yz'+zy'$; $\quad q(\underline{v})=x^2+2y^2+z^2+2yz$

$q(\underline{v})=x^2+2y^2+z^2+2yz=x^2+y^2+(y+z)^2\ge 0$, vero sempre.
Vediamo se $q(\underline{v})=\underline{0}\Leftrightarrow \underline{v}=\underline{0}$

$$q(\underline{v})=0\Leftrightarrow x=0\wedge y=0\wedge y+z=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0\Leftrightarrow \underline{v}=\underline{0}.$$

Pertanto φ è definito positivo.

Secondo metodo (teorema di pagina 163): una matrice simmetrica quadrata reale A è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi. Studiamo pertanto il polinomio caratteristico $\det(A-\lambda I)$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\ldots=(\lambda^2-3\lambda+1)(1-\lambda)$$

Gli autovalori pertanto sono $\lambda_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\lambda_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\lambda_3=1$, tutti positivi.
Concludiamo che, per $h=0$, φ è definito positivo.

<u>2° CASO:</u> $h=1$

Primo metodo.

$$\varphi(\underline{v},\underline{v}') = xy' + xz' + yx' + yy' + 2yz' + zx' + 2zy' + zz' ;$$

$$q(\underline{v}) = 2xy + 2xz + y^2 + 4yz + z^2$$

$q(\underline{v}) \geq 0$ è in generale è falso: controesempio: $\underline{v} = (-1,1,0)$

Pertanto φ non è definito positivo.

Secondo metodo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \ \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda + 2 =$$

$= (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 3\lambda + 2)$. Gli autovalori risultano $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}; \lambda_3 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

I primi due sono negativi. Concludiamo che φ non è definito positivo.

OSSERVAZIONE – *In questo caso, tramite la regola di Ruffini, la scomposizione del polinomio caratteristico (di terzo grado) è stata alquanto immediata. Se così non fosse (e cioè si faticasse a trovare le radici), vale la pena di lasciar perdere il metodo degli autovalori.*

Per i valori dei parametri h e k per cui la funzione φ è un prodotto scalare

iv) si stabilisca se la base canonica è una base ortogonale; in caso di risposta negativa si renda ortogonale tale base;

1° CASO: $h = 0$

Come illustrato a pagina 159, se una base è ortogonale, la matrice del prodotto scalare rispetto a B è diagonale. La matrice A che abbiamo già scritta è la matrice del prodotto scalare dato rispetto alla base canonica $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

Si vede che A non è diagonale $\Rightarrow$ la base canonica non è ortogonale.

Procediamo a renderla ortogonale. Sia $B' = (\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3')$ base ortogonale.

Essendo $q(\underline{e}_1) = q((1,0,0)) = 1 \neq 0$, $\underline{e}_1$ è anisotropo e lo possiamo scegliere come $\underline{e}_1'$.

Sia perciò $<\underline{e}_1> = <\underline{e}_1'> = <(1,0,0)>$ il sottospazio generato da $\underline{e}_1'$. Troviamo il suo complemento ortogonale

$<\underline{e}_1'>^{\perp} \underset{\text{propr. 2 pag.155}}{=} \underline{e}_1'^{\perp} = \{\underline{v} = (x,y,z) \mid \underline{v} \perp \underline{e}_1'\} = \{\underline{v} \mid \underline{v} \cdot \underline{e}_1' = 0\} =$

$= \{(x,y,z) \mid \varphi((x,y,z),(1,0,0)) = 0\} = \{(x,y,z) \mid x = 0\} = \{(0,y,z)\} = <(0,1,0),(0,0,1)>$, con $q((0,1,0)) = 2 \neq 0; q((0,0,1)) = 1 \neq 0$. Scegliamo $\underline{e}_2' = (0,0,1)$

$\underline{e}_1'^{\perp} \cap \underline{e}_2'^{\perp} = \{\underline{w} = (0,y,z) \mid \underline{w} \perp \underline{e}_2'\} = \{(0,y,z) \mid \varphi((0,y,z),(0,0,1)) = 0\} =$
$\{(0,y,z) \mid y + z = 0\} = \{(0,y,-y)\} = <(0,1,-1)>$ con $q((0,1,-1)) = 1 \neq 0$.

Sia pertanto $\underline{e}_3' = (0,1,-1)$ e

$$B'_{ortogonale} = \{(1,0,0),(0,0,1),(0,1,-1)\}$$

Per verificare la correttezza del procedimento si può calcolare
$\varphi\,(\underline{e}_i', \underline{e}_j')\ \forall\ 1 \le i, j \le 3$ con $i \neq j$. Deve risultare sempre zero.

Essendo in questo caso il prodotto scalare definito positivo, si può altrimenti utilizzare il processo di ortogonalizzazione di Gram – Schmidt (pagina 168):
sia $B = (\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ la base canonica. e $B'=(\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3')$ la nuova base ortogonale.

$$\begin{cases} \underline{e}_1' = \underline{e}_1 = (1,0,0) \\ \underline{e}_2' = \underline{e}_2 - \dfrac{\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1'}{q(\underline{e}_1')}\underline{e}_1' = (0,1,0) - \dfrac{(0,1,0)\cdot(1,0,0)}{q((1,0,0))}(1,0,0) = (0,1,0) - 0 = (0,1,0) \\ \underline{e}_3' = \underline{e}_3 - \dfrac{\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_2'}{q(\underline{e}_2')}\underline{e}_2' - \dfrac{\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_1'}{q(\underline{e}_1')}\underline{e}_1' = \ldots = (0,0,1) - \dfrac{1}{2}(0,1,0) - 0 = (0,-\dfrac{1}{2},1) \end{cases}$$

$$B'_{ortogonale} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,-\frac{1}{2},1)\}$$

OSSERVAZIONE – *Una base ortogonale per un prodotto scalare esiste sempre (teorema pag.159) ma non è unica!*

2° CASO: $h = 1$

Anche in questo caso A non è diagonale $\Rightarrow$ la base canonica non è ortogonale.
Procediamo come nel primo caso. Sia $B'=(\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3')$ base ortogonale.

$q(\underline{e}_1) = q(1,0,0) = 0 \Rightarrow$ non possiamo scegliere $\underline{e}_1$ come $\underline{e}_1'$.
Sia $\underline{e}_1' = (0,1,0)$ con $q(\underline{e}_1') = q((0,1,0)) = 1 \neq 0$.
$\underline{e}_1'^{\perp} = \{\underline{v} = (x,y,z) \mid \underline{v} \perp \underline{e}_1'\} = \{(x,y,z) \mid \varphi\,((x,y,z),(0,1,0)) = 0\} =$
$= \{(x,y,z) \mid x + y + 2z = 0\}\ \{(x, -x-2z, z)\} = \langle(1, -1,0),(0,-2,1)\rangle$,
con $q((1,-1,0)) = -1 \neq 0; q((0,-2,1)) = -3 \neq 0$. Scegliamo $\underline{e}_2'=(1,-1,0)$

$\underline{e}_1'^{\perp} \cap \underline{e}_2'^{\perp} = \{\underline{w} = (x, -x-2z, z) \mid \underline{w} \perp \underline{e}_2'\} =$
$= \{(x, -x-2z, z) \mid \varphi\,((x, -x-2z, z),(1,-1,0)) = 0\} =$
$\{(x, -x-2z, z) \mid -x - z = 0\} = \{(x, x, -x)\} = \langle(1,1,-1)\rangle$ con $q((1,1,-1)) = -2 \neq 0$.
Sia pertanto $\underline{e}_3' = (5,-7,1)$ e

$$B'_{ortogonale} = \{(0,1,0),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$$

v) si costruisca il sottospazio $V^{\perp}$, essendo $V := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y = 0\}$.

Scriviamo V come chiusura. $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = -2x\} = \{(x, -2x, z)\} =$
$= \langle(1,-2,0),(0,0,1)\rangle$.

<u>1° CASO:</u> $h = 0$

$V^{\perp} = \{\underline{w} = (x, y, z) \mid \underline{w} \perp \underline{v} \ \forall \ \underline{v} \in V\} = \{\underline{w} = (x, y, z) \mid \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0 \ \forall \ \underline{v} \in V\} =$

$$= \left\{(x, y, z) \mid \begin{cases} \varphi((x, y, z),(1,-2,0)) = 0 \\ \varphi((x, y, z),(0,0,1)) = 0 \end{cases}\right\} = \left\{(x, y, z) \mid \begin{cases} x - 4y - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}\right\} =$$

$$= \left\{(x, y, z) \mid \begin{cases} x = 2y \\ z = -y \end{cases}\right\} = \{(2y, y, -y)\} = \langle(2,1,-1)\rangle.$$

<u>2° CASO:</u> $h = 1$

$$V^{\perp} = \left\{(x, y, z) \mid \begin{cases} \varphi((x, y, z),(1,-2,0)) = 0 \\ \varphi((x, y, z),(0,0,1)) = 0 \end{cases}\right\} = \left\{(x, y, z) \mid \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}\right\} =$$

$$= \left\{(x, y, z) \mid \begin{cases} 3y + 5z = 0 \\ x = -2y - z \end{cases}\right\} = \left\{(x, y, z) \mid \begin{cases} z = -\frac{3}{5}y \\ x = -\frac{7}{5}y \end{cases}\right\} = \left\{\left(-\frac{7}{5}y, y, -\frac{3}{5}y\right)\right\} = \langle(7,-5,3)\rangle.$$

OSSERVAZIONE *– Alla possibile successiva richiesta di verificare se un sottospazio e il suo complemento ortogonale sono in complemento diretto, si veda la Geometria 1.*

Soluzioni a cura di Michele Bolzoni