Algebra lineare – Geometria 1

2 aprile 2008

Esercizio 1. Si consideri la funzione:

$$f : \begin{cases} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto (a+c-d, -2b-2c-2d, a+b+2c) \end{cases}$$

1. Verificare che f è un omomorfismo;
2. determinare una base e la dimensione per $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$;
3. determinare l'insieme $f^{-1}(3,-2,4)$ costituito delle preimmagini di $(3,-2,4)$ tramite l'omomorfismo f.

Dato il sottospazio $W =< (1,-2,2k),(k-1,0,k-1) >\leqslant \mathbb{R}^3$, dove k è un parametro reale:

4. determinare, se esistono, i valori di k per cui W è un sottospazio proprio di $\mathrm{Im}(f)$ e i valori per cui $W = \mathrm{Im}(f)$;
5. determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione per $\mathrm{Im}(f)+W$ e $\mathrm{Im}(f)\cap W$.

Svolgimento.

1. Per verificare che f è un omomorfismo è sufficiente osservare che ciascuna delle componenti del generico vettore dell'immagine è caratterizzata dal un polinomio lineare e omogeneo in a,b,c,d.

2. I vettori di $\ker(f)$ sono le matrici $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ tali che $f(A) = \mathbf{0}$, pertanto tali che a,b,c,d sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} a+c-d=0 \\ -2b-2c-2d=0 \\ a+b+2c=0. \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ridotta a scala diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pertanto l'insieme delle soluzioni è

$$S = \{(\alpha-\beta, -\alpha-\beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} =< (1,-1,1,0),(-1,-1,0,1) >,$$

che corrisponde a

$$\ker(f) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha-\beta & -\alpha-\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =< \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > .$$

È immediato verificare che i due generatori evidenziati sono anche linearmente indipendenti, per esempio osservando che non sono proporzionali, pertanto costituiscono una base di $\ker(f)$ e risulta $\dim \ker(f) = 2$.

Dal Teorema di nullità e rango ricaviamo

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) - \dim \ker(f) = 4 - 2 = 2,$$

inoltre sappiamo che, indicata con $\mathscr{B}_c$ la base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, un insieme di generatori per $\mathrm{Im}(f)$ è costituito dall'insieme

$$f(\mathscr{B}_c) = \{(1,0,1), (0,-2,1), (1,-2,2), (-1,-2,0)\}.$$

È immediato verificare che i primi due vettori dell'insieme sono linearmente indipendenti, per esempio perchè non sono proporzionali, inoltre già sappiamo che il numero massimo di vettori linearmente indipendenti di $\mathrm{Im}(f)$ è 2, pertanto possiamo concludere che una base per $\mathrm{Im}(f)$ è costituita da $\mathscr{B}_{\mathrm{Im}(f)} = \big((1,0,1), (0,-2,1)\big)$.

3. Determinare le preimmagini del vettore $(3,-2,4) \in \mathbb{R}^3$ equivale a risolvere, se possibile, il sistema lineare

$$\begin{cases} a + c - d = 3 \\ -2b - 2c - 2d = -2 \\ a + b + 2c = 4, \end{cases}$$

la cui matrice completa è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

che ridotta a scala diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'insieme delle soluzioni è pertanto

$$S = \{(-3+\alpha-\beta, 1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

che corrisponde a

$$f^{-1}(3,-2,4) = \left\{ \begin{bmatrix} -3+\alpha-\beta & 1-\alpha-\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si noti che

$$f^{-1}(3,-2,4) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + < \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} >= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \ker(f).$$

4. Affincé W sia sottospazio di $\mathrm{Im}(f)$ occorre e basta che i due generatori di W appartengano anche ad $\mathrm{Im}(f)$. Per stabilirlo consideriamo la matrice che ha (per esempio) nelle righe le componenti di una base di $\mathrm{Im}(f)$ e i generatori di W:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2k \\ k-1 & 0 & k-1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango maggiore o uguale a 2, essendo le prime due righe linearmente indipendenti, quindi consideriamo gli orlati che si ottengono aggiungendo una volta la terza e una volta la quarta riga.

$$\det(M_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ k-1 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

$$\det(M_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2k \end{vmatrix} = -4(k-1).$$

Pertanto se $k \neq 1$ W non è sottospazio di $\mathrm{Im}(f)$, mentre se $k = 1$ $W \leqslant \mathrm{Im}(f)$. Per $k = 1$ inoltre $W =< (1, -2, 2), (0, 0, 0) >=< (1, -2, 2) >$ pertanto $\dim(W) = 1$ e dunque W è un sottospazio proprio.

5. Se $k = 1$ W è un sottospazio proprio di $\mathrm{Im}(f)$, pertanto

$$\mathrm{Im}(f) + W = \mathrm{Im}(f)$$
$$\mathrm{Im}(f) \cap W = W.$$

Se $k \neq 1$ W non è contenuto in $\mathrm{Im}(f)$, pertanto $\mathrm{Im}(f) + W$ contiene propriamente $\mathrm{Im}(f)$, da cui si ricava che $\dim(\mathrm{Im}(f) + W) \geqslant 3$. Essendo $\mathrm{Im}(f) + W \leqslant \mathbb{R}^3$, si ha allora necessariamente

$$\mathrm{Im}(f) + W = \mathbb{R}^3, \qquad \mathscr{B}_{\mathrm{Im}(f)+W} = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big).$$

Dopo aver osservato che i due vettori che generano W in questo caso sono linearmente indipendenti (per esempio perché non sono proporzionali), dal Teorema di Grassmann si ricava allora che

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap W) = \dim \mathrm{Im}(f) + \dim W - \dim(\mathrm{Im}(f) + W) = 2 + 2 - 3 = 1,$$

mentre da (1) si ottiene che $\underline{0} \neq (k-1, 0, k-1) \in \mathrm{Im}(f) \cap W$, pertanto $\mathscr{B}_{\mathrm{Im}(f)\cap W} = \big((1,0,1)\big)$. □

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2k-2 & 0 & 0 & 2-k \\ 6-4k & 2 & 0 & 2k-2 \\ 3-2k & 0 & -1 & k-4 \\ 2k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

1. Si determinino i valori di k per cui tutti gli autospazi di f hanno dimensione 1.

Posto ora $k=-1$:

2. si determinino, se possibile, $M, D \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ tali che D sia una matrice diagonale e $A = M^{-1}DM$;

3. si stabilisca, giustificando la risposta, se A è simile alla matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. 1. Determiniamo il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ di A:

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2k-2-\lambda & 0 & 0 & 2-k \\ 6-4k & 2-\lambda & 0 & 2k-2 \\ 3-2k & 0 & -1-\lambda & k-4 \\ 2k-3 & 0 & 0 & 3-k-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(2-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 2k-2-\lambda & 2-k \\ 2k-3 & 3-k-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(2-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2-k \\ 3-2\lambda & 3-k-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-1)(\lambda-k).$$

Se $k \neq \pm 1 \wedge k \neq 2$, allora A ammette 4 autovalori distinti, ciascuno di molteplicità algebrica 1, pertanto tutti gli autospazi hanno dimensione 1 (in particolare per tutti questi valori di k la matrice A è diagonalizzabile). Prendiamo ora in esame i casi rimanenti.

$k=-1$. In questo caso la molteplicità algebrica dell'autovalore -1 è 2, pertanto occorre determinare la dimensione dell'autospazio V_{-1} relativo. La matrice $A-(-1)I$ è:

$$A + I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 3 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{2}$$

ed è immediato verificare che $r(A+I) = 2$ (la prima, la terza e la quarta riga sono proporzionali), pertanto $\dim(V_{-1}) = 4-2 = 2$, quindi uno degli autospazi ha dimensiona maggiore di 1 ed il caso $k=-1$ va escluso. Si noti che $a(-1) = 2 = g(-1)$ pertanto in questo caso la matrice A è diagonalizzabile per il terzo criterio di diagonalizzabilità, il che giustifica la richiesta del punto 2. dell'esercizio.

$k = 1$. In questo caso è la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 ad essere 2 e

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si ha che

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

pertanto $r(A - I) = 3$ e $\dim(V_1) = 4 - 3 = 1$, quindi anche in questo caso tutti gli autospazi di A hanno dimensione 1.

$k = 2$. In questo caso è la molteplicità algebrica dell'autovalore 2 ad essere 2 e

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che $r(A - 2I) = 2$, infatti la seconda e la quarta riga sono proporzionali, mentre la prima riga è nulla, pertanto $\dim(V_2) = 4 - 2 = 2$.

Riassumento gli autospazi relativi agli autoavalori della matrice A hanno tutti dimensione 1 se e soltanto se $k \neq -1 \wedge k \neq 2$.

2. Abbiamo già stabilito che per $k = -1$ la matrice A è diagonalizzabile, pertanto è sicuramente possibile determinare le matrici M e D. Determiniamo una base per ciascuno degli autospazi di A.

$\lambda_1 = -1$. Per determinare l'autospazio dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice (2). Passando ad un sistema principale equivalente è facile ricavare che

$$V_{-1} =< (1, -2, 0, 1), (0, 0, 1, 0) > .$$

$\lambda_2 = 1$. Dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice:

$$A - I = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & -2 & -5 \\ -5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ovvero, per esempio, il sistema principale equivalente

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_4 = 0 \\ 10x_1 + x_2 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui con facili conti si ricava:

$$V_1 =< \left(\frac{3}{5}, -2, -1, 1\right) >=< (3, -10, -5, 5) > .$$

$\lambda_3 = 2$. Per determinare l'autospazio dobbiamo determinare le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato alla matrice

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & -3 & -5 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 3, quindi il sistema ammette ∞^1 soluzioni, inoltre la seconda colonna è costituita interamente da zeri, pertanto

$$V_2 =< (0, 1, 0, 0) > .$$

La matrice M è allora l'inversa della matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base costituita dagli autovettori appena determinati, pertanto

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui si calcola la matrice inversa:

$$M = \frac{1}{\det(M^{-1})} \begin{bmatrix} 5 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & 0 & -3/2 \\ -5/2 & 0 & 1 & 5/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si ha allora (attenzione all'ordine degli autovalori!):

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 2 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & -1 & -5 \\ -5 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & 0 & -3/2 \\ -5/2 & 0 & 1 & 5/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Affinché due matrici siano coniugate è necessario (ma non sufficiente!) che le matrici in questione abbiano lo stesso polinomio caratteristico. Ora

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1) \neq p_A(\lambda),$$

pertanto A e B non sono coniugate. $\square$