Test di Algebra lineare

5 aprile 2011

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare reale

$$\begin{cases} kx + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 2z = k + 1 \end{cases},$$

dove k è un parametro reale.

- Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la compatibilià del sistema e, per i valori di k per cui il sistema è risolubile, determinare il numero delle soluzioni;
  [Per $k = \pm 2$: ∞^1 sol.; per $k = -2$: ∞^2 sol.; per $k = 2$: sist. incompatibile.]

Posto $k = 0$ determinare:

- il sottospazio S delle soluzioni del sistema omogeneo associato; [$S =< (-1; 0; 1) >$]
- una base e la dimensione di S;
- un complemento diretto per S in $\mathbb{R}^3$. [P. es. $< (1; 0; 0), (0; 1; 0) >$]

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si calcoli, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio W generato dai vettori $v_1 = (-2, k-2, 2-k, 1)$, $v_2 = (-1, -1, 2, 1)$ e $v_3 = (2k+2, 2, 2, 1)$.
[Per $k \neq 0$: $\dim W = 3$; per $k = 0$: $\dim W = 2$.]

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rappresentato dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ rispetto alla base canonica.}$$

1. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le dimensioni di Imf e $Kerf$;
   [Per $k \neq 0$: $\dim Imf = 3$, $\dim Kerf = 0$; per $k = 0$: $\dim Imf = 2$, $\dim Kerf = 1$.]
2. si dica per quali valori $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (k^2, 2, k-1)$ appartiene al Imf; [$k \neq 0$]
3. Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, le molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio;
   [Per $k \neq -2, 4$: $\lambda_1 = k, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$, con $m.a._{\lambda_i} = m.g._{\lambda_i} = 1$ per $i = 1, 2, 3$;
   $V_k =< (1; 0; 0)^T >, V_{-2} =< (0; -1; 1)^T >, V_4 =< (\frac{3}{k-4}; 1; 2)^T >$;
   per $k = -2$: $\lambda_1 = -2$ con $m.a._{\lambda_1} = m.g._{\lambda_1} = 2$, $\lambda_2 = 4$ con $m.a._{\lambda_2} = m.g._{\lambda_2} = 1$;
   $V_{-2} =< (1; 0; 0)^T, (0; 1; -1)^T >, V_4 =< (-1; 2; 4)^T >$;
   per $k = 4$: $\lambda_1 = 4$ con $m.a._{\lambda_1} = 2$, $m.g._{\lambda_1} = 1$, $\lambda_2 = -2$ con $m.a._{\lambda_2} = m.g._{\lambda_2} = 1$;
   $V_{-2} =< (0; -1; 1)^T >, V_4 =< (1; 0; 0)^T >$;.]
4. Si dica per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile; [$k \neq 4$]

5. Posto $k = -2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante. $\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \right]$

Esercizio 4. Si consideri il sottoinsieme di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid z + t = 0, z + y = 0 \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Verificare che U è sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e determinarne la dimensione e una base B_U; $\left[U = < \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} > \right]$
2. completare B_U ad una base B di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$; $\left[\text{P. es. } B = B_U \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right]$
3. determinare le componenti di $v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base B trovata e stabilire se $v \in U$. $[\varphi_B(v) = (2; 0; 3; 1),\ v \notin U]$