# Geometria: secondo test

21 giugno 2011

**Es. 1.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sia $\varphi_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione tale che $\forall\ (x_1, x_2, x_3),\ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_k((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 4kx_1y_2 + 4kx_2y_1 + 8x_2y_2 + x_3y_3.$$

Posto $k = \frac{1}{2}$:

(a) stabilire, giustificando la risposta, se $\varphi_{\frac{1}{2}}$ è un prodotto scalare euclideo e scriverne la matrice rispetto alla base canonica;
$\left[\text{Sì.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(b) determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a $\varphi$.
$[((0, 0, 1), (0, 1, 0), (4, -1, 0))]$

Posto $k = 1$:

(c) stabilire, giustificando la risposta, se $\varphi_1$ è un prodotto scalare euclideo;
No: è semidefinito positivo.

(d) determinare una base e la dimensione del radicale di $\mathbb{R}^3$.
$[< (2, -1, 0) >]$

**Es. 2.** Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, date le rette:

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases},$$

determinare:

(a) le equazioni cartesiane della retta di minima distanza tra $r$ ed $s$;
$[x = 0 = y - z]$

(b) un'equazione della sfera $\Gamma$ tangente le due rette e avente centro sulla retta determinata al punto precedente;
$[x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0]$

(c) le coordinate dei centri e le misure dei raggi della circonferenza massima di $\Gamma$ e della circonferenza individuata da $\Gamma$ e dal piano $\alpha$ di equazione $2y - 1 = 0$;
$[(0, 1, 1)\,,\ r = \sqrt{2};\ \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)\,,\ r = \frac{\sqrt{7}}{2}]$

(d) il simmetrico del punto $R$ rispetto al punto $S$, dove, detta $t$ la retta passante per $(1; 0; 0)$ e ortogonale al piano di equazione $x - 4y + 11 = 0$, i punti $R$ ed $S$ sono le intersezioni di $t$ con le rette $r$ ed $s$ rispettivamente.
$[(-1; 8; 0)]$

**Es. 3.** Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, è data la conica $\mathscr{C}$ di equazione

$$\mathscr{C} : x^2 + 3xy + y^2 + x + y = 0.$$

Dopo averla studiata, determinando le coordinate del centro e le equazioni degli assi, scrivere l'equazione della tangente a $\mathscr{C}$ nell'origine del sistema di

riferimento.
[Iperbole generale, centro: $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, assi: $x-y=0$, $5x+5y+2=0$, tangente in $O$: $x+y=0$]
Successivamente:

(a) costruire il fascio $\mathscr{F}$ di coniche tangenti alla retta $t:\ x+y=0$ e passanti per i punti in cui $\mathscr{C}$ interseca gli assi coordinati;
[$kxy+(x+y+1)(x+y)=0$]

(b) studiare il fascio $\mathscr{F}$ (determinare le equazioni delle coniche degeneri e classificare le coniche del fascio dal punto di vista affine e proiettivo, al variare del parametro);
[Coniche deg.: $xy=0$, $(x+y+1)(x+y)=0$; $k<-4 \cup k>0$ iperboli gen., $k=-4$ parabola gen., $k=0$ parabola deg., $-4<k<0$ ellissi gen.]

(c) determinare un'equazione della conica di $\mathscr{F}$ avente il centro nel punto $C=\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ e riconoscere tale conica;
[Circonferenza di centro $C$ e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x^2+y^2+x+y=0$]

(d) costruire il fascio $\mathscr{F}'$ di iperboli equilatere aventi come asintoto la retta di equazione $x-2y-2=0$ e come diametro la retta $t$.
[$(6x+3y-2)(x-2y-2)+k=0$]