Geometria I: secondo test

5 luglio 2011

Esercizio 1. Data, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, la funzione $f_{h,k} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tale che per ogni $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, al variare dei parametri reali h e k,

$$f_{h,k}((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$$

$$= (k-1)x_1y_1 + (k+1)x_1y_2 + (k+1)x_2y_1 + (k-1)x_2y_2 - h(h-2)x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

stabilire, giustificando la risposta, i valori dei parametri per i quali $f_{h,k}$ è un prodotto scalare. [$h = 1, \forall k \in \mathbb{R}$]Successivamente, posti $h = 1$ e $k = 0$:

(a) stabilire, motivandolo, se $f_{1,0}$ è un prodotto scalare euclideo;
[Non lo è. Ad esempio $f_{1,0}((1; 0; 0), (1; 0; 0)) = -1$]

(b) costruire una base ortogonale per esso;
[$\mathscr{B} = ((1; 0; 0), (1; 0; 1), (1; 1; 0))$]

(c) determinare la dimensione del radicale di $\mathbb{R}^3$;
[$\dim(\mathbb{R}^3)^\perp = 1$]

(d) indicare una base per $A^\perp$, dove $A = \{(1; 2; 0), (2; -1; 0)\}$.
[$((1; 0; 1), (1; 1; 0))$]

Esercizio 2. Dato in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ fascio $\mathscr{F}_k$ di coniche di equazione

$$(k-1)x^2 + 2(k+1)xy + (k-1)y^2 + 2x - 2y = 0,$$

(a) studiare tale fascio, determinando i punti base e classificando le coniche dal punto di vista affine e proiettivo. [Fascio di coniche bitangenti, con punti base $(0; 0)$ e $(1; -1)$, entrambi di molteplicità 2. La conica degenere che si ottiene per $k = 0$ ha equazione $(x - y)(x - y - 2) = 0$; l'altra, non espressa in $\mathscr{F}_k$, ha equazione $(x + y)^2 = 0$. Se $k < 0$ si hanno ellissi generali, se $k > 0$ iperboli generali]

(b) detta $\mathscr{C}$ la conica di $\mathscr{F}_k$ passante per il punto P di coordinate $P = \left(\frac{2}{3}; 0\right)$, determinarne le coordinate del centro, le equazioni degli asintoti e degli assi;
[$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; assi: $x + y = 0$, $x - y - 1 = 0$; asintoti: $3x + (1 \pm 2i\sqrt{2})y \pm i\sqrt{2} - 1 = 0$]

(c) determinare un'equazione della tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P.
[$3x + 5y - 2 = 0$]

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, sono date le rette r_h ed s_h di equazioni:

$$r_h : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2y + hz - h - 2 = 0 \end{cases} \qquad s_h : \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ z - h = 0 \end{cases},$$

dove h è un parametro reale.

(a) Studiare le posizioni reciproche di tali rette al variare del parametro.
[Incidenti se $h = 0$ o $h = 1$; sghembe altrimenti]

(b) Nei casi in cui le rette siano incidenti, determinare le coordinate dei punti di intersezione e le equazioni dei piani che le contengono.
[Se $h = 0$: $(1; 1; 0)$, $3x + y - 4 = 0$; se $h = 1$: $(1; 1; 1)$, $6x + 2y + z - 9 = 0$]

(c) Posto $h = 1$, scrivere:

(c.1) le equazioni cartesiane della retta t passante per il punto X di intersezione tra r_1 ed s_1 e ortogonale al piano π in cui esse sono contenute;
[$x - 6z + 5 = 0 = y - 2z + 1$]

(c.2) le coordinate dei punti appartenenti a t che distano $\sqrt{41}$ da π;
[$(7; 3; 2), (-5; -1; 0)$]

(c.3) la distanza tra l'origine e la retta r_1 e la distanza tra l'origine e il piano π.
$\left[d(O, r_1) = \sqrt{\frac{14}{5}}, \quad d(O, \pi) = \frac{9}{\sqrt{41}}\right]$

Esercizio 4. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, date le rette r di equazione $r : x - 2y + 3 = 0$ e t di equazione $t : y - 2 = 0$, scrivere l'equazione della parabola generale avente come asse la retta r e tangente nel punto $A = (-3; 2)$ alla retta t.
[$x^2 - 4xy + 4y^2 - 8y + 14x + 9 = 0$]