Test di Algebra lineare

22 marzo 2011

Esercizio 1. Si considerino i sottospazi di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} k(a+b) & 0 \\ a-b & k^2a+b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$
- $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & ky \\ 0 & k(x+y) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x,y \in \mathbb{R} \right\}$

1. Determinare una base e la dimensione di U e W al variare del parametro reale k;
   $\left[U = \left\langle \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle ,\ \dim U = 2\ \forall k \in \mathbb{R},\right.$
   $\left. W = \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & k \end{pmatrix} \right\rangle, & \dim W = 2,\ \forall k \neq 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, & \dim W = 1,\ \text{per } k = 0 \end{cases} \right]$
2. Stabilire per quali valori di k $U+W$ è somma diretta. $[U+W = U \oplus W \Leftrightarrow k \neq \pm 1]$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}_3[x]$ si dica per quali valori reali di a il vettore $v_a = a + (1-a)x^3$ appartiene alla chiusura di $A_a = \{(a-1)x^2, 2+x+x^3, 4+(a-1)x+x^2+(a-1)x^3\}$. $[\nexists\ a]$

Esercizio 3. Sia f_k l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rappresentato dalla matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 4 & 3 \\ 2 & -(k+1) & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

1. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le dimensioni di Imf_k e di $Kerf_k$;
   [per $k \neq 3, -1$: $\dim Imf_k = 3$, $\dim Kerf_k = 0$; per $k = 3 \vee k = -1$: $\dim Imf_k = 2$, $\dim Kerf_k = 1$]
2. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (k, 5+k, 4+k)$ appartiene ad Imf_k. $[\ v \in Imf_k \Leftrightarrow k \neq 3, -1]$

Esercizio 4. In $\mathbb{C}_1[x]$ su $\mathbb{R}$ si costruisca per ciascuna delle seguenti condizioni, se possibile, un endomorfismo f che le soddisfi:

1. $Kerf = A$; [per esempio sia f t.c. $\tilde{f} = L_M$, con $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$]

2. $Imf = A$. [per esempio sia f t.c. $\tilde{f} = L_M$, con $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$]

dove $A =< i(1+x), 1+ix, 1+x >$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, le molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio;
   [autovalori 0, 4, 5, con $a_0 = a_4 = a_5 = 1 = g_0 = g_4 = g_5$; autospazi $V_0 = < (-1,1,1) >$, $V_4 =< (9,7,11) >$, $V_5 =< (0,1,-1) >$]

2. Si costruisca una matrice diagonale D simile ad A e con relativa matrice diagonalizzante M. [$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = M^{-1}AM$, con $M = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 11 & -1 \end{pmatrix}$]