Geometria I - PRIMO TEST

27 marzo 2012

Esercizio 1. (a) Siano W e W' due sottospazi vettoriali di uno stesso spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$, dove $\mathbb{K}$ è un campo. Dimostrare che se $W \cup W'$ è sottospazio di V, allora $W \subseteq W'$ oppure $W' \subseteq W$. $\boxed{3}$

(b) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi nella variabile x di grado al massimo 3, a coefficienti reali, sia

$$W = \{ax^3 + ax^2 + bx + b \in \mathbb{R}_3[x] \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad U_\alpha = \{0, x + \alpha, -x - 1\}.$$

(b.1) Stabilire, giustificando la risposta, se W ed U_α sono sottospazi di $\mathbb{R}_3[x]$. [W è sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$, U non lo è] $\boxed{2}$

(b.2) Costruire $W' :=< U_\alpha >$, indicandone una base.[Se $\alpha \neq 1$, allora $W' = < x + k, x + 1 >$. Se $\alpha = 1$, allora $W' = < x + 1 >$] $\boxed{2}$

(b.3) Posto $\alpha = 1$, dire se $W \cup W'$ è sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$. [Sì.] $\boxed{2}$

(b.4) Posto $\alpha = 0$, costruire una base per $W \cap W'$.[$\{(1 + x)\}$] $\boxed{2}$

(b.5) Al variare di α, determinare una base per il complemento diretto di W' in $\mathbb{R}_3[x]$.[Se $\alpha \neq 1$, allora il complemento è , ad esempio, $< x^2, x^3 >$. Se $\alpha = 1$, $< 1, x^2, x^3 >$] $\boxed{2}$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, sia k un parametro reale e sia M la matrice

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & k^2 - 2k - 2 & 6 \\ k & -\frac{k}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinare:

(a) l'azione dell'endomorfismo $f = L_M \ : \ \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sul generico vettore (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$;[$f(x, y, z) = \left(-2x + y - 3z, 4x + (k^2 - 2k - 2)y + 6z, kx - \frac{k}{2}y\right)$] $\boxed{1}$

(b) al variare di $k \in \mathbb{R}$, il nucleo e l'immagine di f (le rispettive basi e dimensioni);[se $k \neq 0 \wedge k \neq 2$, allora $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ (base canonica), $\ker f = \{\vec{0}\}$. Se $k = 0$, allora $\operatorname{Im} f = < (1, -2, 0) >$ e $\ker f = < (1, 2, 0), (0, 3, 1) >$. Se $k = 2$, allora $\operatorname{Im} f = < (1, -2, -1), (-3, 6, 0) >$ e $\ker f = < (1, 2, 0) >$.] $\boxed{5}$

(c) i valori di k per i quali il vettore $\vec{v} = (k, 0, k)$ appartiene all'immagine di f;[$k \neq 2$] $\boxed{3}$

(d) per i valori di k determinati al punto precedente, le preimmagini di $\vec{v}$;[Se $k \neq 0 \wedge k \neq 2$, allora $f^{-1}(\vec{v}) = \{\left(\frac{k-1}{k-2}, \frac{2}{k-2}, -\frac{k+2}{3}\right)\}$ Se $k = 0$, allora $f^{-1}(\vec{v}) = \ker f$] $\boxed{5}$

(e) i valori di k per i quali la matrice M ammette un autovalore nullo. Posto $k = 0$, discutere la diagonalizzabilità della matrice e, se possibile, diagonalizzarla, indicando anche la matrice diagonalizzante. [Ammette autovalore nullo per $k = 0, k = 2$. Per $k = 0$ la matrice è diagonalizzabile e si ha $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$]

$\boxed{5}$