Geometria (seconda parte)

4 giugno 2013

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ siano $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonica e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la forma bilineare simmetrica tale che:

$$f(\vec{e_1}, \vec{e_1}) = 2 \qquad f(\vec{e_1}, \vec{e_1} + \vec{e_2}) = 3, \qquad f(\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} + \vec{e_2}) = 5,$$

$$f(\vec{e_1}, \vec{e_1} + \vec{e_3}) = 4 \qquad f(\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_1} + \vec{e_3}) = 8, \qquad f(\vec{e_2}, \vec{e_3}) = 1.$$

(a) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica. $\boxed{4}$

$[A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}]$

(b) Stabilire, giustificando la risposta, se f è definita positiva. $\boxed{3}$

[No. Ad es $q(-1; 0; 1) = 0$]

(c) Verificare se $\mathscr{B}$ è una base ortogonale rispetto a f e, nel caso in cui non lo sia, determinare una base ortogonale. $\boxed{3}$

[Base ortogonale: ((1;0;0),(1;-2;0),(1;0;-1))]

(d) Determinare il sottoinsieme W di $\mathbb{R}^3$ costituito dai vettori isotropi rispetto a f e stabilire, giustificando la riposta, se si tratta di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. $\boxed{5}$

$[W =< (1; 0; -1) >]$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano:

$$r : \begin{cases} 2y + z = 6 \\ x + z = 1 \end{cases} , \qquad s : \begin{cases} x + z = -2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

due rette.

(a) Verificare che le rette sono sghembe e non sono ortogonali. $\boxed{2}$

(b) Determinare un'equazione del fascio $\mathscr{F}$ di piani paralleli a r e s. $\boxed{2}$

$[x + z = k, k \in \mathbb{R}]$

(c) Tra i piani di $\mathscr{F}$ determinare un'equazione di quello equidistante alle due rette date. $\boxed{3}$

$[2x + 2z - 1 = 0]$

(d) Scrivere le equazioni cartesiane della retta t, proiezione ortogonale di r sul piano di equazione $x + 2y = 8$. $\boxed{4}$

$[4x - 2y + 3z + 2 = 0 = x + 2y - 8]$

Esercizio 3. Nel piano euclideo reale, sia $\mathscr{C}$ il fascio di circonferenze tangenti nell'origine all'asse y. $\boxed{3}$

Siano: P il punto di coordinate $(0;1)$; p la polare di P rispetto alla generica circonferenza di $\mathscr{C}$ ed $R \neq (0;0)$ l'intersezione di p con la circonferenza stessa.

Scrivere l'equazione cartesiana del luogo $\mathscr{L}$ descritto dal punto R al variare della circonferenza di $\mathscr{C}$ e riconoscere il luogo. $\boxed{3}$

[Circonferenza di centro P e raggio 1: $x^2 + y^2 - 2y = 0$]