Geometria 2 - Geometria

6 settembre 2011

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita come segue:

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1.$$

(a) Stabilire, motivandolo, se f è un prodotto scalare euclideo.
[No, ad esempio $q(1, 0, 1) = -3$, $q(1; 1; 0) = 2$]

(b) Scrivere la matrice di rappresentazione di f rispetto alla base

$$\mathscr{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

$$\left[\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}\right]$$

(c) Dire se $\mathscr{B}$ è una base ortogonale rispetto ad f. In caso contrario determinare una base ortogonale che contenga il massimo numero di vettori di $\mathscr{B}$.
[Non è ortogonale, lo è ad esempio $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (-14, 9, 15))$]

Esercizio 2. Indicata con $q(x_1, x_2, x_3)$ la forma quadratica associata alla forma bilineare f dell'esercizio precedente e interpretate $[(x_1, x_2, x_3)]$ come coordinate proiettive omogenee in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione $q(x_1, x_2, x_3) = 0$.
[Circonferenza di centro $(1; 0)$ e raggio $\sqrt{3}$]
Successivamente:

(a) scrivere l'equazione del fascio $\mathscr{F}$ di coniche tangenti a $\mathscr{C}$ nei punti in cui essa incontra l'asse y; [$(k + 1)x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$]

(b) determinare l'equazione dell'iperbole equilatera di $\mathscr{F}$, le coordinate del centro e le equazioni degli asintoti.
[$x^2 - y^2 + 2x + 2$, centro: $(-1; 0)$, asintoti: $x \pm y + 1 = 0$]

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano α di equazione

$$\alpha \ : \ 5x - 2y - 6z + 2 = 0$$

e due rette r ed s di equazioni

$$r \ : \ \begin{cases} x + 6y = 8 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s \ : \ \begin{cases} x = k + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases},$$

Determinare, al variare di k, parametro reale:

(a) i valori di k per i quali le rette r ed s sono incidenti; $[k = 3]$

(b) un'equazione cartesiana del piano π parallelo sia a r sia a s e passante per il punto $P = (0; 0; 2)$; $[3x + 4y + 7z - 14 = 0]$

(c) le equazioni cartesiane della retta t ortogonale alla retta r, parallela al piano α e passante per il punto P.
$$\left[\begin{cases} 13x - y = 0 \\ 7x + 2z - 4 = 0 \end{cases} \right]$$