Geometria (seconda parte)

9 luglio 2013

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, data la funzione, al variare del parametro reale α:

$$f((x,y),(x',y')) = (\alpha+1)xx' + 2\alpha xy' + 2\alpha x'y,$$

determinare:

(a) motivandolo, se essa rappresenta un prodotto scalare; $\boxed{1}$

(b) la matrice che la rappresenta rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$; $\boxed{2}$

(c) una base per il complemento ortogonale di $\vec{v} = (1,0)$; $\boxed{2}$

(d) un valore di α per il quale il radicale di $\mathbb{R}^2$ non sia banale e indicare una base per il radicale stesso; $\boxed{3}$

(e) nei casi $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$, se f risulta definita (positiva o negativa), semidefinita (positiva o negativa) o indefinita. $\boxed{3}$

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano:

$$a \;:\; \begin{cases} x+3y=7 \\ y-z=0 \end{cases}, \qquad b \;:\; \begin{cases} x-y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

due rette. Determinare:

(a) la posizione reciproca delle due rette e le coordinate dell'eventuale punto di intersezione; $\boxed{5}$

(b) un'equazione cartesiana del piano che contiene entrambe le rette; $\boxed{3}$

(c) le coordinate del punto X appartenente a b tale che il triangolo AXB sia rettangolo in X e abbia area $6\sqrt{2}$, essendo $B(1;2;2)$ e A appartenente alla retta a. $\boxed{5}$

Esercizio 3. Nel piano proiettivo, è dato il fascio di coniche, al variare del parametro reale k:

$$\mathscr{F} \;:\; kx^2 + 2(k+1)xy + ky^2 + 4x + 1 = 0.$$

(a) Indicare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali si ottengono coniche generali. $\boxed{2}$

(b) Studiare il fascio dal punto di vista affine. [Per $k < -\frac{1}{2}$ ellisse (generale), per$k = -\frac{1}{2}$ parabola (generale), per $k > -\frac{1}{2}$ iperbole (degenere per $k = -\frac{1}{6}$)] $\boxed{3}$

(c) Determinare le equazioni delle coniche generatrici del fascio e classificarle dal punto di vista proiettivo. [$(x+y)^2 = 0$ conica doppiamente degenere, $2xy + 4x + 1 = 0$ conica generale] $\boxed{3}$