Geometria 2

X+n settembre 2011

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia $f_{h,k} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione tale che

$$f_{h,k}((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + kx_1y_2 - kx_2y_1 + x_2y_2 + hx_1x_3^2 - x_3y_3,$$

con h e k parametri reali. Determinare:

(a) i valori dei parametri per i quali $f_{h,k}$ risulta essere una forma bilineare;
[$\forall\ k \in \mathbb{R}, h = 0$]

(b) i valori dei parametri per i quali $f_{h,k}$ risulta essere un prodotto scalare. [$k = h = 0$]

Per i valori che rendono $f_{h,k}$ un prodotto scalare, stabilire, giustificandolo:

(c) se esso è degenere e scriverne la matrice rispetto alla base

$$\mathscr{B} = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1));$$

$$\left[\text{Non è degenere;}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

(d) se $\mathscr{B}$ è una base ortogonale rispetto a tale prodotto scalare.
[$\mathscr{B}$ non è ortogonale, lo è ad esempio ((1,1,1),(0,1,1),(1,0,1))]

Esercizio 2. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, determinare un'equazione della conica di centro $C = (-1; -1)$, avente un asintoto parallelo alla retta $a : x - y + 4 = 0$, passante per il punto P di coordinate $P = (-2; 1)$ e tale che la direzione dell'altro asintoto sia data dal vettore $\vec{v} = (1; -1)$.
Determinarne il tipo affine e le equazioni degli assi.
[$x^2 - y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$, iperbole (equilatera), assi: $x = -1$ e $y = -1$]

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, sia Σ la sfera di equazione

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0$$

e sia Π_k il fascio improprio di piani avente equazione

$$\Pi_k : 2x - y + 2z = k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Determinare:

(a) i valori del parametro k per i quali la sfera Σ e il piano Π_k hanno in comune una circonferenza di raggio 1; [$k = -2$ e $k = 4$]

(b) le coordinate dei centri delle circonferenze individuate al punto precedente.
[$C_{-2} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right); C_4 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$]