Geometria (seconda parte)

25 giugno 2013

Esercizio 1. (a) Nel piano proiettivo determinare l'equazione della parabola $\mathscr{P}$ avente asse parallelo alla retta bisettrice del primo e terzo quadrante, tangente in $A(-1/2, -1/2)$ alla retta di equazione $x + y + 1 = 0$ e passante per il punto $B(1; -1)$. $\boxed{5}$

[$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$]

(b) Dopo aver verificato che l'equazione di tale parabola è $x^2-2xy+y^2-4x-4y-4 = 0$, determinare le coordinate del vertice. $\boxed{2}$

[$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$]

(c) Sia P un punto generico del piano. Siano T e V i punti di contatto di $\mathscr{P}$ con le tangenti uscenti da P. Scrivere l'equazione del luogo descritto dai punti P per i quali T e V sono allineati con l'origine. $\boxed{5}$

[$x + y + 2 = 0$]

Esercizio 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ siano:

$$a \ : \ \begin{cases} 3x + 5y = 5 \\ 2x + 5z = 10 \end{cases} , \qquad b \ : \ \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

due rette. Determinare:

(a) la posizione reciproca delle due rette e le coordinate dell'eventuale punto di intersezione; $\boxed{4}$

[Sghembe]

(b) un'equazione cartesiana per il fascio di piani ortogonali alla retta b. $\boxed{3}$

[$x + y + k = 0, \ k \in \mathbb{R}$]

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ sia $f \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la forma bilineare:

$$f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + 2xy' + 2x'y + 4kyy' + kzz', \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

(a) Scrivere la matrice di rappresentazione di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. $\boxed{2}$

[$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$]

(b) Stabilire, motivando la risposta, se f è un prodotto scalare. $\boxed{1}$
[Lo è per ogni $k \in \mathbb{R}$]

(c) Dire se f è definita positiva, nei casi $k = 1$ e $k = 2$. $\boxed{4}$
[Definita positiva per $k = 2$ (mentre per $k = 1$ è semidefinita positiva)]

(d) Determinare una base per il radicale di f, nei casi $k = 1$ e $k = 2$. $\boxed{4}$
[Per $k = 1$, $V^{\perp} =< (-2; 1; 0) >$;   per $k = 2$, $V^{\perp} = \{(0; 0; 0)\}$]

(e) Posto $k = 1$, verificare se la base canonica è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ e in caso negativo, ortogonalizzarla. $\boxed{3}$
[Base ortogonale: $\{(1; 0; 0), (0; 0; 1), (-2; 1; 0)\}$]