Algebra lineare – Geometria 1

2 aprile 2008

Esercizio 1. Si consideri la funzione:

$$f : \begin{cases} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto (a+c-d, -2b-2c-2d, a+b+2c) \end{cases}$$

1. Verificare che f è un omomorfismo;
2. determinare una base e la dimensione per $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$;
3. determinare l'insieme $f^{-1}(3,-2,4)$ costituito delle preimmagini di $(3,-2,4)$ tramite l'omomorfismo f.

Dato il sottospazio $W =< (1,-2,2k), (k-1,0,k-1) >\leqslant \mathbb{R}^3$, dove k è un parametro reale:

4. determinare, se esistono, i valori di k per cui W è un sottospazio proprio di $\mathrm{Im}(f)$ e i valori per cui $W = \mathrm{Im}(f)$;
5. determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base e la dimensione per $\mathrm{Im}(f) + W$ e $\mathrm{Im}(f) \cap W$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2k-2 & 0 & 0 & 2-k \\ 6-4k & 2 & 0 & 2k-2 \\ 3-2k & 0 & -1 & k-4 \\ 2k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

1. Si determinino i valori di k per cui tutti gli autospazi di f hanno dimensione 1.

Posto ora $k = -1$:

2. si determinino, se possibile, $M, D \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ tali che D sia una matrice diagonale e $A = M^{-1}DM$;
3. si stabilisca, giustificando la risposta, se A è simile alla matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$