Algebra lineare – Geometria 1

4 aprile 2009

Esercizio 1. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'applicazione

$$f_k : \begin{cases} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto \quad \big(a+b, kb+(1-k)c, (k-1)d\big). \end{cases}$$

1. Determinare i valori di k per cui f_k è un omomorfismo e, per tali valori, la matrice della rappresentazione scalare di f_k rispetto alle basi canoniche;
2. determinare i valori di k per cui f_k è un epimorfismo e quelli per cui è un monomorfismo.

Posto ora $k = 1$:

3. determinare una base e la dimensione per $\mathrm{Im}(f_1)$ e $\ker(f_1)$;
4. determinare una base per il più piccolo sottospazio vettoriale U di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ contenente i vettori
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};$$
5. determinare una base per $f_1(U)$;
6. determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(f_1) \cap W$, dove $W = < (2,1,1), (0,0,1) >$.

Esercizio 2. Si considerino, al variare dei parametri reali h e k, le matrici

$$A_h = \begin{bmatrix} h & 0 & -1 & 1 \\ 2h+4 & h+2 & h+2 & 0 \\ 1 & h+2 & 1 & h+1 \end{bmatrix}, \quad B_{h,k} = \begin{bmatrix} k+3 \\ 0 \\ h+3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_h X = B_{h,k}$, specificando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Posto ora $h = -2$ e $k = 0$:

2. determinare l'insieme S delle soluzioni ed esprimere la generica soluzione del sistema come somma di una soluzione particolare e di una soluzione del sistema lineare omogeneo associato;
3. determinare una base e la dimensione per $< S >$;
4. determinare un comlpemento diretto di $< S >$ in $\mathbb{R}^4$.

Geometria 2

4 aprile 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare $b_{h,k}$ definita rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_{h,k} = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & h-1 \\ h & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove h e k sono parametri reali.

1. Determinare i valori di h e k per cui la forma bilineare è simmetrica;
2. per ciascuno dei valori determinati al punto precedente stabilire se la forma bilineare simmetrica è degenere e se è definita, semidefinita o indefinita;

Posto ora $h = 1$ e $k = 0$:

3. determinare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a $b_{1,0}$;
4. determinare la dimensione e una base del complemento ortogonale di W rispetto a $b_{1,0}$, essendo

$$W = \{(\alpha+\beta+2\gamma, \alpha+\beta+2\gamma, \alpha+\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 2. Nel piano euclideo reale in cui è fissato un riferimento cartesiano determinare un'equazione della conica $\mathscr{C}$ tangente a $r: \ x+y-1=0$ in $A=(1,0)$, a $s: \ x+y-5=0$ in $B=(3,2)$ e passante per $C=(1,1)$, riconoscere tale conica e studiarla (centro, assi, eventuali asintoti).

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, si considerino le rette

$$a: \begin{cases} x-1=0 \\ y+z=0 \end{cases}, \quad b: \begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}, \quad c: \begin{cases} x+ky=0 \\ 2x+2y+z=k+1 \end{cases},$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle tre rette;
2. posto $k=1$ determinare un'equazione cartesiana del luogo descritto dai punti delle rette che si appoggiano a tutte e tre le rette.