# Algebra lineare – Geometria 1

4 settembre 2009

**Esercizio 1.** Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ si considerino l'insieme $U_k$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} y+z=k+1 \\ 2x+y+z=0, \end{cases}$$

dove $k$ è un parametro reale, e l'insieme

$$W=\{(\alpha+\beta,\beta,\alpha)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}.$$

1. Determinare i valori di $k\in\mathbb{R}$ per cui $U_k$ risulta essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;
2. verificare che $W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinarne una base e la dimensione.

Per ciascuno dei valori di $k$ determinati al punto 1:

3. determinare una base e la dimensione di $U_k+W$ e stabilire se la somma è diretta;
4. determinare un complemento diretto per $U_k$ e uno per $W$;
5. determinare le componenti del vettore $\mathbf{v}=(1,-2,3)$ rispetto a una base di $\mathbb{R}^3$ ottenuta completando la base di $W$ determinata al punto 2.

**Esercizio 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 si consideri, al variare di $k\in\mathbb{R}$, la funzione

$$\varphi_k : \begin{cases} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) & \longmapsto & p(kx+1) \end{cases}$$

1. Verificare che $\varphi_k$ è un endomorfismo per tutti i valori di $k\in\mathbb{R}$ e determinarne la matrice $A_k$ della rappresentazione scalare rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$;
2. determinare al variare di $k\in\mathbb{R}$ una base e la dimensione di $\ker\varphi_k$ e $\operatorname{Im}\varphi_k$;
3. determinare al variare di $k\in\mathbb{R}$ gli autovalori di $\varphi_k$ e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica e stabilire per quali valori di $k$ l'endomorfismo è diagonalizzabile;
4. posto $k=-1$ determinare, se possibile, una matrice $D$ diagonale simile ad $A_{-1}$ e una matrice diagonalizzante $M$.

# Geometria 2

4 settembre 2009

**Esercizio 1.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica $b_k$ definita, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2k \\ -1 & 2 & k \\ 2k & k & 0 \end{bmatrix},$$

dove $k$ è un parametro reale.

1. Determinare la variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del radicale di $b_k$;
2. posto $k = 1$ determinare l'insieme dei vettori isotropi di $b_1$ e una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a $b_1$.

**Esercizio 2.** Nel piano euclideo reale in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le coniche

$$\mathscr{C}_1 : \ x^2 - 4y^2 - 3x + y + 2 = 0,$$
$$\mathscr{C}_2 : \ 2y^2 + xy - 2y = 0.$$

1. Riconoscere e studiare le coniche $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$;
2. determinare un'equazione cartesiana del fascio di coniche individuato da $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ e le coordinate dei punti base di tale fascio;
3. stabilire, motivando la risposta, se la conica $\mathscr{C} : \ x^2 + 2y^2 + 3xy - 3x - 5y + 2 = 0$ appartiene al fascio;
4. determinare un'equazione cartesiana della parabola $\mathscr{P}$ del fascio e un'equazione cartesiana della retta tangente a $\mathscr{P}$ nel suo vertice.

**Esercizio 3.** Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, si considerino le rette $a : \ x - 1 = 0 = z$, $b : \ y - 1 = 0 = x$ e $c : \ z - 1 = 0 = 2y + z - 1$. Dopo aver verificato che le tre rette sono a due a due sghembe, determinare, se possibile, un'equazione cartesiana di una retta incidente a tutte e tre le rette date e parallela al piano $\pi : \ x - 3z = 0$.