Algebra lineare – Geometria 1

6 aprile 2010

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare reale

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 - a \\ a^2x + (a-1)y + (a-1)z = a \\ ax + (2-a)y = 1 - a \end{cases},$$

dove a è un parametro reale.

- Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ la compatibilià del sistema e, per i valori di a per cui il sistema è risolubile, determinare il numero delle soluzioni;

Posto $a = 0$ determinare:

- l'insieme S delle soluzioni e stabilire se S è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;
- una base e la dimensione di $V =< S >$;
- un complemento diretto per V in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (k^2, 0, k, 1)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 0, k, -k), (k, 0, 0, 1), (0, 1, 0, k)]$

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rappresentato dalla matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

1. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le dimensioni $\mathrm{Im}(f_k)$ e $\ker(f_k)$;
2. si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (5k, 1 - k^2, k + 2)$ appartiene ad $\mathrm{Im}(f_k)$;
3. si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali l'endomorfismo è diagonalizzabile;
4. posto $k = 3$ si determini una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.

Geometria 2

6 aprile 2010

Esercizio 1. Sia $b(x,y) = 2x_1y_1 + (k+2)x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_3y_3$ una forma bilineare su R^3.
Determinare k affinchè b sia un prodotto scalare.
Posto k uguale a tale valore,

1. si dica se il prodotto scalare è degenere, si dica inoltre se è definito (positivo o negativo), semidefinito (positivo o negativo) o indefinito e si determini una base ortogonale di R^3 rispetto a b;

2. si riconosca e si studi la conica C del piano proiettivo reale di equazione $q(x) = 0$, con $q(x)$ forma quadratica associata a $b(x,y)$;

3. si consideri il fascio di coniche generato da C e $\bar{C} : x^2-2x+1 = 0$, se ne determinino i punti base, la natura e le coniche degeneri.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, si considerino il punto P di coordinate $(1,2,1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} 4x + ky - kz = 0 \\ kx - z + k - 1 = 0 \end{cases},$$

al variare di k parametro reale.

1. Si dia una rappresentazione cartesiana della retta s per P ortogonale al piano coordinato xz;

2. Si determinino i piani α e β ortogonali ad s che distano 5 dal punto P;

3. Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione della retta r con i piani α e β;

4. posto $k = 1$, si scriva una rappresentazione cartesiana della circonferenza di centro P e raggio 3 giacente nel piano contenente il punto P e la retta r.