Algebra lineare – Geometria 1

7 gennaio 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi:

$$U =< (1,0,1,0), (0,k,1,k+1), (2,k,3,k+1) >,$$
$$W =< (k,0,1,0), (1,2,-1,1), (k+1,2,0,k) >,$$

dove k è un parametro reale. Al variare di k determinare:

1. la dimensione e una base di U e di W;

2. la dimensione e una base di $U+W$;

3. la dimensione di $U \cap W$.

Posto ora $k=1$ determinare:

4. una base per $U \cap W$;

5. un complemento diretto per $U \cap W$.

Esercizio 2. Si consideri l'omomorfismo $f_k : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ha come matrice della rappresentazione scalare rispetto alle basi canoniche la matrice:

$$A_k = \begin{bmatrix} k+4 & 2 & -2 & k-4 \\ 0 & 0 & k & k \\ -2 & -1 & k+1 & k+2 \end{bmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

1. Verificare che per $k=0$ l'immagine di f_k ha dimensione minima;

Posto ora $k=0$:

2. determinare una base e la dimensione per $\operatorname{Im}(f_k)$ e $\ker(f_k)$;

3. determinare una complemento diretto per $\ker(f_k)$ in $\mathbb{R}^4$ e uno per $\operatorname{Im}(f_k)$ in $\mathbb{R}^3$;

4. indicate con $\mathscr{B}$ una base per $\mathbb{R}^4$ che contenga il maggior numero possibile di vettori di $\ker(f_k)$ e con $\mathscr{B}'$ una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga il maggior numero possibile di vettori di $\operatorname{Im}(f_k)$, determinare la matrice della rappresentazione scalare di f_k rispetto a tali basi.

5. determinare i vettori $\mathbf{u}$ di $\mathbb{R}^4$ per cui $f_k(\mathbf{u})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e i vettori $\mathbf{w}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui $f_k^{-1}(\mathbf{w})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Geometria 2

7 gennaio 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica b_k definita, per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, da:

$$b_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2kx_1y_1 - 4x_1y_3 - 4x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 + kx_3y_3,$$

dove k è un parametro reale.

1. Determinare la matrice che rappresenta b_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;

2. determinare i valori di k per cui la forma bilineare b_k è degenere e, per tali valori di k, determinare una base e la dimensione per il radicale di b_k;

Posto ora $k = 2$ e indicata con q la forma quadratica associata a b_2, interpretando $[(x_1, x_2, x_3)]$ come coordinate omogenee nello spazio proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$:

3. studiare la conica $\mathscr{C}$ di equazione $q(x_1, x_2, x_3) = 0$;

4. determinare un'equazione della circonferenza tangente a $\mathscr{C}$ nei punti $P = [(2, 1, 1)]$ e $Q = [(0, -7, -7)]$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ riferito a coordinate cartesiane ortogonali si considerino le rette $r : x + y + z + 4 = 0 = 2x + y + 3z + 6$ ed $s : y - z - 2 = 0 = x + 2z + 6$ e il punto $P = (-3, 0, -1)$.

1. Dopo aver verificato che le due rette r ed s sono parallele determinare un'equazione cartesiana del piano π che le contiene e della retta a passante per P e ortogonale e incidente ad entrambe;

2. determinare una rappresentazione cartesiana della circonferenza di π con centro sulla retta a e tangente a r ed s.