Geometria – Geometria 2

7 aprile 2005

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino la circonferenza Γ: $x^2 + y^2 = 4$ e il punto A(2, 4).
i) Si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti alla circonferenza Γ nei punti di contatto delle tangenti a Γ condotte da A.
ii) Si individuino le coniche degeneri e le eventuali circonferenze di Φ.
iii) Detta Σ la parabola non degenere di Φ, se ne determinino l'asse e il vertice.
iv) Si determini l'equazione dell'iperbole equilatera K di Φ e si scrivano le equazioni degli asintoti di K.
v) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo Λ descritto dai centri delle coniche non degeneri del fascio Φ. Si riconosca Λ.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino

i punto A(0, 1, 0) e B(-1, 0, 1)

e i piani π: $x + (h^2+1)y - z = 2-h$ e σ: $2x + (5-h^2)y - 2h^2z = 2h$,

ove h è un parametro reale.
i) Al variare del parametro h si stabilisca la posizione reciproca dei piani π e σ; in particolare, si dica se esistono valori di h per i quali i due piano sono ortogonali.
ii) Posto $h = 0$, dopo avere verificato che i piani π e σ sono incidenti, si scriva l'equazione del piano α passante per A e perpendicolare alla retta r comune a π e σ.
iii) Detta t la retta passante per i punti A e B, si verifichi che t appartiene al piano α e che è sghemba con la retta r. Si determini, inoltre, della retta di minima distanza tra t e r.
iv) Si scriva l'equazione della circonferenza Γ tangente in A alla retta t e avente centro sulla retta r.

Algebra lineare – Geometria 1

7 aprile 2005

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R_3}[x]$ si considerino

i sottoinsiemi $U = \{p(x)\in\mathbf{R_3}[x] \mid p(1) = 0 \text{ e } p(-1) = 0\}$ e $W = \{p(x)\in\mathbf{R_3}[x] \mid p(-x) = -p(x)\}$

e la funzione f: $\mathbf{R_3}[x] \to \mathbf{R_3}[x]$ tale che $\forall p(x)\in\mathbf{R_3}[x]$ $f(p(x)) = p(1-x)$.

i) Si verifichi che U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R_3}[x]$ e per ciascuno di essi si determini una base e la dimensione.
ii) Si costruiscano i sottospazi $U\cap W$ e $U + W$.
iii) Dopo avere verificato che f è un automorfismo, se ne scriva la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbf{R_3}[x]$.
iv) Si costruiscano i sottospazi $f(U)$ e $f(W)$; si verifichi se U è sottospazio vettoriale di $f(W)$.

2) Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ avente, rispetto alla base canonica, matrice

$$\begin{bmatrix} h^2 & 0 & h \\ 0 & h & h+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ove $h\in\mathbf{R}$ è un parametro.
i) Al variare del parametro h, si stabilisca la molteplicità algebrica degli autovalori dell'endomorfismo f.
ii) Posto $h = -1$, si determinino gli autospazio relativi agli autovalori di f; si verifichi se $\mathbf{R^3}$ è decomponibile in somma diretta di tali autospazi.
iii) Posto $h = 2$, si stabilisca se f è diagonalizzabile; in caso di risposta positiva, si diagonalizzi l'endomorfismo f.