Algebra lineare – Geometria 1
7 dicembre 2005

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3$ si considerino
il sottoinsieme $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_3 \mid y - 2z = 0\}$
il sottospazio $U = \langle (h, 2, 1), (h, h, 0), (1, h, 0) \rangle$
ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
i) Dopo avere verificato che W è un sottospazio di $\mathbf{R}_3$, se ne determini una base e la dimensione.
Al variare del parametro h:
ii) si determini una base e la dimensione del sottospazio U;
iii) si costruisca un complemento diretto per U;
iv) si stabilisca se W è un sottospazio di U;
v) si costruiscano i sottospazi $U + W$ e $U \cap W$.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3$ si consideri la funzione $f : \mathbf{R}_3 \longrightarrow \mathbf{R}_3$ tale che
$\forall\ (x, y, z) \in \mathbf{R}_3 \quad f(x, y, z) = (x - y + hz, -x + hy + z, x - y)$
ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
i) Dopo avere verificato che f è un endomorfismo di $\mathbf{R}_3$ per ogni valore del parametro, si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}_3$.
ii) Si costruiscano i sottospazi vettoriali Imf e Ker$f$; per ognuno di essi si determinino una base e la dimensione.
iii) Si stabilisca per quali valori del parametro h il vettore $v = (1, h, 1)$ appartiene a Imf; per tali valori si costruisca l'insieme delle preimmagini di v.
iv) Si stabilisca per quali valori del parametro h il vettore v appartiene a Ker$f$.

Geometria – Geometria 2
7 dicembre 2005

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, si consideri il fascio di coniche
Φ: $(1+k)x^2 - (1+k)y^2 - (3+4k)x + (3+4k)y - 2 = 0$.
i) Si riconoscano le coniche generatrici del fascio Φ, si stabilisca la natura del fascio, se ne determinino i punti base e le coniche degeneri.
ii) Si costruisca il luogo descritto dal centro della generica conica non degenere del fascio Φ, al variare della conica nel fascio.
iii) Si individui la conica Σ non degenere del fascio Φ che ha centro in C (5/2, 5/2); si determinino le equazioni degli asintoti di Σ.
iv) Si individui la conica Γ non degenere del fascio Φ rispetto alla quale la retta r: $5x - 11y + 15 = 0$ è la polare di R(1, 0); si riconosca Γ.
v) Si scriva l'equazione del fascio Λ di coniche tangenti a Σ nei punti in cui essa è intersecata dalla retta t: $x = 2$.

2) Nello spazio affine euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in cui è fissato un sistema di coordinate ortogonali, si considerino
il piano π: $x + y + z = 0$ e
le rette r: $x + (h+1)y - 1 = y - z = 0$ e s: $x - y + z = x + y - z = 0$
ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
i) Al variare di h si stabilisca la posizione reciproca delle rette r e s.
ii) Nei casi in cui r e s sono complanari, si determini l'equazione del piano da esse individuato.
Posto $h = 0$:
iii) si scriva l'equazione della circonferenza con centro C (-1, 1, 1) tangente e complanare alla retta r; si determini la posizione della retta s rispetto a tale circonferenza;
iv) si scriva l'equazione cartesiana del luogo delle rette incidenti le rette r e s e perpendicolari al piano π.