Algebra lineare – Geometria 1

9 gennaio 2007

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{Mat_3(R)}$ si considerino

il sottoinsieme $W = \{A = [a_{ij}] \in \mathbf{Mat_3(R)} \mid a_{ii} = a_{i,i+1} = a_{i+1,1}\}$

l'endomorfismo f: $\mathbf{Mat_3(R)} \to \mathbf{Mat_3(R)}$ tale che $\forall M \in \mathbf{Mat_3(R)}$ $f(M) = M^t$.

i) Dopo avere verificato che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{Mat_3(R)}$, se ne determini una base e la dimensione.
ii) Detto S il sottospazio delle matrici simmetriche di $\mathbf{Mat_3(R)}$, si costruisca il sottospazio $W \cap S$ e se ne determini la dimensione.
iii) Detto A il sottospazio delle matrici antisimmetriche di $\mathbf{Mat_3(R)}$, si costruisca il sottospazio $W+A$ e se ne determini la dimensione.
iv) Si verifichi se $f(W) = W$.
v) Si costruisca il sottospazio $f(W) \cap f(A)$.

2) Si discuta la risolubilità del sistema reale

$$\begin{cases} (2a+1)x + 4y - 5z = a+1 \\ 3x + (a+1)y - az = 2(a+1) \\ ax + y - z = a \end{cases}$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
i) Nei casi in cui il sistema è risolubile, se ne determinino le soluzioni.
ii) Si stabilisca per quali valori di a il sistema ammette la soluzione $x = 3/4$, $y = z = -1/4$. Per tali valori si stabilisca se il sistema ammette altre soluzioni e in caso di risposta positiva si determinino.

Geometria – Geometria 2

9 gennaio 2007

1) Nel piano affine euclideo reale, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sono assegnate le rette

$$r\colon 2x - (h+4)y = 2$$
$$s\colon (2h+1)x - (h+2)y = 1$$
$$t\colon (h+1)x - 2y = 1-h.$$

ove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
Si stabilisca per quali valori del parametro le tre rette sono coincidenti.
Per tali valori:
i) si scriva l'equazione del fascio Φ di coniche tangenti alla retta r nel punto A(1; 0) e all'asse y nell'origine O(0; 0);
ii) si determinino le equazioni delle eventuali circonferenze e delle parabole non degeneri del fascio Φ;
iii) si individui la conica Σ del fascio Φ rispetto alla quale la retta $p\colon x - 2 = 0$ ha come polo il punto P(2; 1); si riconosca Σ e si scriva l'equazione della tangente a Σ in T(1; 1);
iv) si considerino la conica Σ e il punto B(0; 3); sia q una generica retta passante per B e sia Q il suo polo rispetto a Σ. Si scriva l'equazione del luogo Λ descritto da Q al variare di q nel fascio di centro B.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ si consideri la funzione $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tale che, qualunque siano $v = (x, y, z)$ e $v' = (x', y', z')$ vettori di $\mathbf{R}^3$, si abbia

$$\varphi(v, v') = hxx' + (2+k+h)xy' + (h^2+h)yx' + kyy' + hyz' + hzy' + (k-2)y^2 + (k-1)zz',$$

ove h e k sono parametri reali.
Si stabilisca per quali valori di tali parametri la funzione φ
i) è un forma bilineare;
ii) è un prodotto scalare;
iii) è un prodotto scalare definito positivo.
Per i valori dei parametri h e k per cui la funzione φ è un prodotto scalare
iv) si stabilisca se la base canonica è una base ortogonale; in caso di risposta negativa si renda ortogonale tale base;
v) si determini la dimensione di $V^{\perp}$, essendo $V := \langle(1, 0, 1), (-1, 2, 1), (1, 2, 3)\rangle$
vi) si costruisca il sottoinsieme A dei vettori isotropi e si stabilisca se A è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.