Algebra lineare - Geometria 1

9 gennaio 2008

Esercizio 1. Si considerino lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x e di grado massimo 2 , sia $f_k : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'omomorfismo tale che

$$f_k\,(a, b, c, d) = a + (b + kc)\,x + (b - kc)\,x^2\,,$$

ove k è un parametro reale.

1. Si determini la matrice della rappresentazione scalare di f_k rispetto alle basi canoniche dei due spazi vettoriali in questione.
2. Si determinino, al variare di k, nucleo ed immagine per f_k, con le rispettive dimensioni.
3. Si dica per quali valori di k il polinomio $1 + x + x^2$ appartiene ad Im f_k e, per tali valori, si determini l'insieme A delle sue preimmagini.
4. Si stabilisca, per ciascun valore di k determinato precedentemente, se A è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e si determini $< A >$ ed una sua base.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare reale

$$\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + 2z = 4k \\ -x - y = k + 3 \end{cases}$$

con k parametro reale.

1. Si discuta, al variare di k, la risolubilità del sistema.

Fissato ora $k = -1$,

2. si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema;
3. considerata la matrice A dei coefficienti delle incognite, si stabilisca se A diagonalizzabile e, in caso affermativo, la si diagonalizzi.