Algebra lineare – Geometria 1

9 settembre 2008

Esercizio 1. Si considerino gli omomorfismi:

$$f : \begin{cases} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto (a + 3c + d, 2a - 2b + 4d, 2a - b + 4c + 3d) \end{cases}$$

$$g_k : \begin{cases} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \big(ak + bk + 2c + 2d, 2b + 2kc + 2d(k+1), ak + 2b + 3c + (5-k)d\big) \end{cases}$$

dove k è un parametro reale. Determinare al variare di k:

1. le matrici di f e g_k rispetto alle basi canoniche di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ e di $\mathbb{R}^3$;
2. una base e la dimensione per $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$;
3. i valori di k, se esistono, per cui $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g_k)$;
4. i valori di k, se esistono, per cui $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Im}(g_k)$ sono in somma diretta;
5. le preimmagini tramite f del vettore $\mathbf{b} = (2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice della rappresentazione scalare rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A_k = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 3 \\ 0 & k & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}),$$

dove k è un parametro reale. Chiamiamo **vettore unito** dell'endomorfismo f_k un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ che viene trasformato in se stesso da f_k.

Al variare del parametro k:

1. determinare gli eventuali vettori uniti dell'endomorfismo f_k;
2. stabilire motivando la risposta se l'insieme dei vettori uniti determinato al punto precedente è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;
3. stabilire motivando la risposta per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile e per tali valori determinare una matrice diagonale D_k e una matrice invertibile M_k tali che $D_k = M_k^{-1} A_k M_k$.

Geometria 2

9 settembre 2008

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si consideri la funzione $f_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_k\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = (2 - 3k)x_1y_2 - k^2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2$$

dove k è un parametro reale. Dopo aver verificato che f_k è una forma bilineare per qualsiasi valore di k determinare al variare di k:

1. la matrice che rappresenta f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$;
2. i valori di k, se esistono, per cui f_k è un prodotto scalare e quelli per cui è un prodotto scalare euclideo.

Per ciascuno dei valori di k determinati al punto precedente:

3. stabilire se la forma f_k è degenere, e in caso di risposta affermativa determinare il radicale di f_k;
4. determinare il luogo $\mathcal{Q}_k$ dei vettori isotropi di f_k e riconoscere tale luogo.

Esercizio 2. Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali si consideri il fascio di rette $\mathscr{F} : (1 + k)x + (k - 2)y - 6k = 0,\ k \in \mathbb{R}$, e le due rette $r :\ y - 1 = 0$ ed $s :\ 2x - y - 1 = 0$.

1. Determinare i valori di k per cui la corrispondente retta del fascio e le rette r ed s **non** formano un triangolo.

Indicata inoltre con a la retta di $\mathscr{F}$ corrispondente alla scelta $k = 2$ e con A, B e C i vertici del triangolo formato dalle rette r, s e a:

2. determinare l'area del triangolo di vertici A, B, C;
3. determinare un'equazione della parabola $\mathscr{P}$ con asse parallelo alla retta $y+2x-1 = 0$ e passante per i punti A, B e C;
4. determinare un'equazione cartesiana del luogo descritto dai poli delle rette del fascio $\mathscr{F}$ rispetto alla polarità definita dalla parabola $\mathscr{P}$.