

Algebra lineare - Geometria 1

9 dicembre 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\text{Mat}_3(\mathbb{R})$ si consideri il sottoinsieme

$$V := \{A = [a_{ij}] \in \text{Mat}_3(\mathbb{R}) \mid a_{i1} = a_{i2} = 0, i = 2, 3\}.$$

1. Si verifichi che V è un sottospazio di $\text{Mat}_3(\mathbb{R})$.
2. Si dimostri che, se $A \in V$ e $B \in V$, allora $A \cdot B \in V$.
3. Si stabilisca se le matrici di V sono invertibili.
4. Si determinino condizioni sui coefficienti a_{ij} delle matrici di V affinché esse risultino diagonalizzabili.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare reale

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = h \\ 3x - y + hz = 0 \\ 2x + 3y - 9z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

con h parametro reale.

1. Si discuta, al variare di h , la risolubilità del sistema.
2. Per i valori di h per cui il sistema è risolubile, lo si risolva.
3. Se ora si considera la matrice A delle incognite del sistema dato e l'omomorfismo

$$L_A : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \longmapsto A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

si dica, al variare di h , se tale omomorfismo è iniettivo, o suriettivo, o biiettivo.

Geometria - Geometria 2

9 dicembre 2009

Esercizio 1. Nel piano affine euclideo reale in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si consideri il fascio di coniche \mathcal{F} di equazione

$$\mathcal{F} : 2x^2 + (3 - k)xy + (1 + k)y^2 - 6x - 3y = 0, \quad k \in \mathbb{R}$$

1. Si studi la natura del fascio \mathcal{F} e se ne determinino le coniche degeneri.
2. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k si ottengono le iperboli, le ellissi e le parabole di \mathcal{F} .
3. Sia \mathcal{C} la generica conica di \mathcal{F} : Si scriva l'equazione cartesiana del luogo \mathcal{L} descritto dal centro di \mathcal{C} al variare di \mathcal{C} nel fascio. Si riconosca \mathcal{L} .

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo reale in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, siano r ed s le rette di equazioni:

$$r : \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 - 4t'z = ht' \end{cases}$$

con h parametro reale. Determinare i valori di h per cui:

1. r risulta parallela ad s , e per questi valori determinare la distanza tra r ed s .
2. Esiste una sola retta per l'origine ortogonale ad r ed s .
3. Esistono infinite rette per l'origine ortogonali ad r ed s .