# Algebra lineare – Geometria 1

5 aprile 2011

**Esercizio 1.** Si consideri il sottoinsieme di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid z+t=0, z+y=0 \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Verificare che $U$ è sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ e determinarne la dimensione e una base;
   $\left[ U = < \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} > \right]$
2. determinare le componenti di $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
   $[\vec{v} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}]$
3. determinare un complemento diretto di $U$.
   [P. es. $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) = U \oplus < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$]

**Esercizio 2.** Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ rappresentato dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ rispetto alla base canonica.}$$

1. Si determinino gli autovalori di $A$ e, per ogni autovalore trovato, le molteplicità algebrica e geometrica;
   [Per $k \neq -2, 4$: $\lambda_1 = k, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$, con $m.a._{\lambda_i} = m.g._{\lambda_i} = 1$ per $i = 1, 2, 3$;
   per $k = -2$: $\lambda_1 = -2$ con $m.a._{\lambda_1} = m.g._{\lambda_1} = 2$, $\lambda_2 = 4$ con $m.a._{\lambda_2} = m.g._{\lambda_2} = 1$;
   per $k = 4$: $\lambda_1 = 4$ con $m.a._{\lambda_1} = 2$, $m.g._{\lambda_1} = 1$, $\lambda_2 = -2$ con $m.a._{\lambda_2} = m.g._{\lambda_2} = 1$.]
2. Si dica per quali valori di $k$ la matrice è diagonalizzabile; $[k \neq 4]$
3. Posto $k = 1$ si trovi una matrice diagonale simile ad $A$ e la relativa matrice diagonalizzante. $\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right]$

**Esercizio 3.** Si considerino, al variare del parametro reale $k$, le matrici

$$A_k = \begin{bmatrix} k & k-2 \\ 1 & 2 \\ 1 & k \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} k-2 \\ 0 \\ k-2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

1. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, specificando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile; [Sistema compatibile per $k = 0$ e $k = 2$. In entrambi i casi un'unica soluzione.]

2. posto $k = 2$ determinare l'insieme delle soluzioni $S$. [$S = \{(0; 0)\}$]

**Esercizio 4.** In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di $k$ il vettore $v = (k^2, 2, -3k)$ appartiene alla chiusura di $S = [(k-3, -3, 0), (0, -1, k-3), (3, 0, -k)]$. [$k \neq 3, 9$]