Algebra lineare – Geometria 1

5 luglio 2011

Esercizio 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a+2 \\ a-1 & 0 \\ a & a+2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a+1 \\ 1-a \\ 2 \end{bmatrix}$$

Al variare del parametro reale a si determinino:

(a) il rango della matrice dei coefficienti; $[a \neq 1 \wedge a \neq -2 : r(A) = 2; a = 1 \vee -2 : r(A) = 1]$

(b) il rango della matrice completa; $[a \neq 1 \wedge a \neq -2 : r(A|B) = 2; a = 1 \vee -2 : r(A|B) = 1]$

(c) i valori di a per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni; $[a \neq 1 \wedge a \neq -2 : \exists! soluzione; a = 1 \vee -2 : \infty^1 soluzioni]$

(d) l'insieme S delle soluzioni per $a = -2$; $[S = \{(-1, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}\}]$

(e) l'insieme H delle soluzioni per $a = -1$. $[S = \{(-1, 1) \in \mathbb{R}^2\}]$

Esercizio 2. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche. $[1, k+1, 2]$ $[k \neq 0 \wedge k \neq 1 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1;]$
$[k = 0 : m_a(1) = 2, m_g(1) = 1, m_a(2) = 1, m_g(2) = 1;]$
$[k = 1 : m_a(1) = m_g(1) = 1, m_a(2) = 2, m_g(2) = 1.]$

(b) Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile; $[k \neq 0 \wedge k \neq 1]$

(c) posto $k = 3$ si determini una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante. $\left[D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 13 & 1 \end{pmatrix} \right]$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri l'endomorfismo:

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (a, b, c, d) \longmapsto (2a + 2c, 3b + kd, 3a + 2b, ka) \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

(a) Determinare la matrice della rappresentazione scalare di f_k rispetto alla base canonica; $\left[A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & k \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

(b) Determinare i valori di k per cui f_k non è un automorfismo; $[k = 0]$

(c) per ciascuno dei valori di k trovati al punto precedente determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$.
$[\ker f = \langle (0,0,0,1) \rangle, dim = 1; \operatorname{Im} f = \langle (1,0,0,0)(0,1,0,0)(0,0,1,0) \rangle dim 3]$