Geometria 1

7 dicembre 2010

Es. 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, i seguenti sottoinsiemi:

- $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x - z = 0 = y - 2z\}$
- $W = \{(x, y, z, t)) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x + y - 3t = 0 = y + kz\}$

(a) Stabilire se U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e determinarne la dimensione e una base;

(b) determinare i valori di k per i quali U e W risultano contenuti in uno stesso sottospazio tridimensionale e scrivere, per tali valori di k, un'equazione cartesiana del sottospazio tridimensionale che li contiene;

(c) stabilire, per i valori determinati al punto precedente, se i due sottospazi U e W hanno intersezione non banale, e in caso affermativo, determinare $U \cap W$.

Es. 2. Dato, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, rappresentato rispetto ad una base $B = (e_1, e_2, e_3)$ dalla matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} k & k+1 & k+2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) stabilire i valori di k per cui $\mathrm{Ker}T_k$ sia contenuto in $\mathrm{Im}T_k$;

(b) determinare i valori di k per cui T_k sia diagonalizzabile;

(c) scrivere la matrice che rappresenta l'endomorfismo T_k rispetto alla base $B' = (e_1 + e_2 + e_3,\ e_2 + 2e_3,\ e_1)$

Es. 3. Siano T_1 e T_2 l'insieme delle matrici triangolari rispettivamente inferiori e superiori di $M_3(\mathbb{R})$. Verificare se:

(a) T_1 e T_2 sono sottospazi vettoriali di $M_3(\mathbb{R})$;

(b) $T_1 + T_2 = M_3(\mathbb{R})$;

(c) $T_1 + T_2 = M_3(\mathbb{R})$ è somma diretta di sottospazi.