Algebra lineare – Geometria 1

13 luglio 2010

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \mid 2x + ky = 0\}$
- $W = \{(x, y, z)) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) \mid x + y + (k-2)z = 0\}$

1. Stabilire se U e W sono sottospazi vettoriali d i$\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ e determinarne la dimensione e una base;
2. Determinare la dimensione e una base per $U + W$ e $U \cap W$ e stabilire se la somma $U + W$ è diretta;
3. Determinare $U \cup W$ e stabilire se è sottospazio .

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (k+1, 0, k^2, -2)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, -1, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (1, 0-2, 2)]$

Esercizio 3. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A_k = \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 2 \\ -1 & k+5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ k+3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

1. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, specificando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;
2. considerando l'endomorfismo associato f di $\mathbb{R}^3$ a cui è associata, rispetto alla base canonica, la matrice dei coefficienti delle incognite del sistema dato, si determinino, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la dimensione e una base per $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$.

Posto ora $k = 1$:

3. si stabilisca se A_1 è diagonalizzabile e in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante.