Algebra lineare – Geometria 1

15 settembre 2010

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi:

- $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x_1 - x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0 \right\}$
- $W = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >$.

1. Determinare la dimensione e una base per $U+W$ e $U \cap W$ e stabilire se la somma $U+W$ è diretta.
   [$U+W = < \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} >$, $U \cap W = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} >$, U e W non sono in somma diretta].

2. Dire se esiste un endomorfismo T di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ tale che $W = \ker(T)$ e $U = \mathrm{Im}(T)$ e, in caso affermativo, costruire un endomorfismo con queste proprietà e determinare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.
   [p.es., se $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è la base canonica di $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$: $T(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T(E_3) = -T(E_2)$, $T(E_4) = T(E_1)$].

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si considerino, al variare dei parametri reali h e k, i tre vettori:

$$v_1 = (k, 0, 1-h), \quad v_2 = (h, 1, 1), \quad v_3 = (1, 1, 1),$$

e siano

$$U =< v_1, v_2, v_3 >, \quad W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x_1 - 2x_3 = x_2 \right\}.$$

1. Determinare, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$, una base per U.
   [$h \neq 1$, $\forall k$: $U = \mathbb{R}^3$; $h = 1$, per $k \neq 0$: $U =< (1,0,0), (1,1,1) >$, per $k = 0$: $U =< (1,1,1) >$].

2. Determinare i valori di h e k per i quali U e W sono in somma diretta, e per tali valori completare la base di U estratta dall'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$.
   [$h = 1$ e $k = 0$; base di $\mathbb{R}^3$: $\{(1,1,1), (1,1,0), (2,0,1)\}$].

Esercizio 3. Si discuta, al variare del parametro reale h, il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ (h+1)x + (2h+1)y + hz = 0 \\ hx + 2hy + 2hz = 0 \\ hx + hy + z = 0. \end{cases}$$

e lo si risolva per $h = 0$.
[$h \neq 0$: 1! soluzione; $h = 0$: ∞^1 soluzioni $W =< (1,-1,0) >$].