Algebra lineare – Geometria 1

21 giugno 2011

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare reale

$$\begin{cases} hx = h \\ (h^2-1)x + (h+1)y + 2z = 1 \\ (1-h^2)x + y + z = 0 \end{cases},$$

dove h è un parametro reale.

- Discutere al variare di $h \in \mathbb{R}$ la compatibilità del sistema e, per i valori di h per cui il sistema è risolubile, determinare il numero delle soluzioni;

Posto $h = 0$ determinare:

- l'insieme S delle soluzioni e stabilire se S è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;
- una base e la dimensione di $V =< S >$;
- un complemento diretto per V in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$\begin{gathered} f([1,0,0]) = [3,2,1] \\ f([0,1,0]) = [-1,2,-3] \\ f([0,0,1]) = [2,4,-2] \end{gathered}$$

e sia $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$g_\alpha([1,2]) = [6,4,2] \text{ e } g_\alpha([2,-1]) = [0,\alpha,4]$$

Determinare per quali valori del parametro reale α si ha $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g_\alpha)$

Esercizio 3. Sia $f_k : \mathbb{R}_3[\mathbb{R}] \longmapsto \mathbb{R}_3[\mathbb{R}]$ tale che $f_k(p(x)) = xp'(x-k)$ dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$.

- Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, se esistono, la matrice A associata a f_k è diagonalizzabile.
- Posto $k = -1$, si determini una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.