Algebra lineare – Geometria 1

22 marzo 2011

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino

- $U = \{(x+y, 0, x+ky) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) | x, y \in \mathbb{R}\}$
- $W = \{(x+ky, x, ky)) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}) | x, y \in \mathbb{R}\}$

1. Stabilire se U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ e determinarne, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione e una base; $\left[U = \begin{cases} <(1,0,1),(1,0,k)>, \dim U = 2, \ \forall k \neq 1 \\ <(1,0,1)>, \ \ \dim U = 1, \ \text{per } k = 1 \end{cases}, \right.$ $\left. W = \begin{cases} <(1,1,0),(1,0,1)>, \ \dim W = 2, \ \forall k \neq 0 \\ <(1,1,0)>, \ \ \dim W = 1, \ \text{per } k = 0 \end{cases} \right]$
2. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la somma $U + W$ è diretta; $[U + W = U \oplus W \Leftrightarrow k = 0]$
3. Posto $k = 1$ determinare un complemento diretto per W. $[\mathbb{R}^3 = W \oplus <(0,0,1)>]$

Esercizio 2. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A_k = \begin{bmatrix} k & -2k & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ k+1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

1. Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema lineare $A_k X = B_k$, specificando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile; [risolubile $\Longleftrightarrow k \neq \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$, con 1! soluzione]
2. considerando l'endomorfismo associato f di $\mathbb{R}^3$ a cui è associata, rispetto alla base canonica, la matrice dei coefficienti delle incognite del sistema dato, si determinino, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la dimensione e una base per Imf e $Kerf$.
   [Per $k = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$: $Imf = <(k,0,1),(1,-k,1)>$ e $Kerf = <-(2k+1), k, 1>$; per $k \neq \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$: $Imf = \mathbb{R}^3$ e $Kerf = \{0\}$]

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$$

1. Si determinino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
   [Per $k \neq -1, 0$: $\lambda_1 = k+1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$, con $m.a._{\lambda_i} = m.g._{\lambda_i} = 1$ per $i = 1, 2, 3$; per $k = -1$: $\lambda_1 = 0$ con $m.a._{\lambda_1} = 2$, $m.g._{\lambda_1} = 1$, $\lambda_2 = 1$ con $m.a._{\lambda_2} = m.g._{\lambda_2} = 1$; per $k = 0$: $\lambda_1 = 1$ con $m.a._{\lambda_1} = 2$, $m.g._{\lambda_1} = 1$, $\lambda_2 = 0$ con $m.a._{\lambda_2} = m.g._{\lambda_2} = 1$.]

2. Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile; [Per $k \neq -1, 0$]

3. Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante. $\left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}\right]$