Algebra lineare – Geometria 1

26 giugno 2006

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{Mat_2(R)}$ si considerino

il sottoinsieme $W = \{A \in \mathbf{Mat_2(R)} \mid \det(A - A^t) = 0\}$

il sottospazio $U = \left\langle \begin{pmatrix} h & h \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+h & h \end{pmatrix} \right\rangle$, dove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro

e l'omomorfismo $f: \mathbf{Mat_2(R)} \to \mathbf{R^4}$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = (x + z, x - y, t, y + z)$.

i) Si verifichi che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{Mat_2(R)}$ e se ne determini una base e la dimensione.
Al variare del parametro reale h:
ii) si stabilisca la dimensione dello sottospazio U;
iii) si costruiscano i sottospazi vettoriali $W + U$ e $W \cap U$. Esistono valori del parametro h per i quali U è complemento diretto per W?
iv) Posto $h = 1$, dopo avere constatato che $W + U = \mathbf{Mat_2(R)}$, si verifichi se $f(W) + f(U) = \mathbf{R^4}$.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R^3}$ si consideri la funzione $f: \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ tale che

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R^3} \quad f(x, y, z) = (x + (1-h)y + z,\ x + (1-2h)y + (1-h)z,\ x - 2hy + z)$$

dove $h \in \mathbf{R}$ è un parametro.
i) Si verifichi che la funzione f è un endomorfismo per ogni valore del parametro reale.
Al variare di h in $\mathbf{R}$
ii) si costruiscano i sottospazi $\mathrm{Im}f$ e $\mathrm{Ker}f$;
iii) si stabilisca se il vettore $v = (0, 1-h, 1+h)$ appartiene a $\mathrm{Im}f$; in caso di risposta affermativa, si determinino le preimmagini di v.