

Algebra lineare – Geometria 1

29 settembre 2010

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare reale

$$\begin{cases} x + y + kz = 2k \\ kx + y + z = 0 \\ (1+k)x + 2y + (1+k)z = 2k \end{cases},$$

dove k è un parametro reale.

- Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità del sistema.
[$k = 1$: incompatibile; $\forall k \neq 1$: ∞^1 soluzioni].
- Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme S delle soluzioni di tale sistema costituisce un sottospazio vettoriale in \mathbb{R}^3 . [$k = 0$].

Posto $k = -1$ determinare:

- una base e la dimensione di $U = \langle S \rangle$. [$U = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$].
- la dimensione e una base di $U \cap W$, dove $W = \{(x, y, z) | x - y = 0\}$.
[$U \cap W = \langle (1, 1, 0) \rangle$].

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di t è legato il sistema:

$$S = (t^2, 0, t + 1, 1), (1, 0, t, -t), (t, 0, 0, 1) \quad [\forall t \in \mathbb{R}].$$

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k , gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
[$k \neq 2, 3$: $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $a_{\lambda_1} = g_{\lambda_1} = 2$, $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} = 1$ per $i = 2, 3$;
 $k = 2$: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $a_{\lambda_1} = 3 \neq 2 = g_{\lambda_1}$, $a_{\lambda_2} = g_{\lambda_2} = 1$;
 $k = 3$: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $a_{\lambda_1} = 3 = g_{\lambda_1}$, $a_{\lambda_2} = g_{\lambda_2} = 1$].
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile. [$\forall k \neq 2$].
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.

$$[D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}].$$